10. СВОЈСТВЕНИ ПРОБЛЕМ

(10.1) Показати да је сваки скуп својствених вектора који одговарају различитим својственим вредностима линеарног оператора - *линеарно независан*.

Нека различитим својственим вредностима $\lambda_1, \lambda_2, , \lambda_k$ одговарају својствени вектори $|v_1\rangle, |v_2\rangle, \ldots, |v_k\rangle$. То значи да важе следећи изрази

$$\begin{cases} \hat{A}|v_1\rangle = \lambda_1|v_1\rangle \\ \hat{A}|v_2\rangle = \lambda_2|v_2\rangle \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \hat{A}|v_k\rangle = \lambda_k|v_k\rangle \end{cases}$$

За доказивање тврђења из поставке задатка користи се метод *математичке индукције*.

- За $k=1$ је $\hat{A}|v_1\rangle = \lambda_1|v_1\rangle$, те је први својствени вектор $|v_1\rangle$ линеарно независан;
- За $k=n$ се претпостави да је првих n својствених вектора линеарно независно, што значи да је линеарна комбинација својствених вектора једнака нултом вектору

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i |v_i\rangle = |0\rangle$$

акко су коефицијенти линеарне комбинације сваки понаособ једнаки нули:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

- Сада се претпостави да је $|v_{n+1}\rangle$ својствени вектор *линеарно зависан*, тј. да се може написати као линеарна комбинација првих n линеарно независних својствених вектора

$$|v_{n+1}\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i |v_i\rangle.$$

Из горње претпоставке следи да је

$$\lambda_{n+1}|v_{n+1}\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i |v_i\rangle;$$

заменом вектора $|v_{n+1}\rangle$ из претпоследње формуле у горњи израз добија се да је

$$\lambda_{n+1} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i |v_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i |v_i\rangle$$

односно да је

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_{n+1} |v_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i |v_i\rangle$$

одакле се коначно добија израз

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, (\lambda_{n+1} - \lambda_i) \left| v_i \right\rangle = \left| 0 \right\rangle .$$

Горњи израз не може да буде тачан пошто су све својствене вредности на основу поставке задатка различите, те је $\lambda_{n+1} - \lambda_i \neq 0$, а својствени вектори су, како је раније претпостављено, линеарно независни. Стога је последња препоставка погрешна, односно и $n+1$ својствени вектор мора бити линеарно независан.

(10.2) Доказати следеће

(а) да *геометријски мултиплицитет* (број својствених вектора) дегенерисане својствене вредности a линеарног оператора $\hat{A}$ није већи од *алгебарског мултиплицитета* (броја својствених вредности);

(б) да је геометријски мултиплицитет својствене вредности λ линеарног оператора $\hat{A}$ једнак *дефекту* оператора $\hat{A}-\lambda\hat{I}$.

(а) Нека је m геометријски мултиплицитет својствене вредности a оператора $\hat{A}$, тј. нека важе следећи изрази

$$\underline{\begin{cases} \hat{A}|v_1\rangle = a|v_1\rangle \\ \hat{A}|v_2\rangle = a|v_2\rangle \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \hat{A}|v_m\rangle = a|v_m\rangle \end{cases}}$$

Наравно, својствени вектори $|v_1\rangle,|v_2\rangle,\ldots,|v_m\rangle$ линеарно су независни.

На основу задатка (10.13) се зна да је матрица оператора $\hat{A}$ у базису адаптираном на декомпозицију $\mathbb{L}\left(|v_1\rangle,|v_2\rangle,\ldots,|v_m\rangle\right)\dotplus\mathbb{L}'$ има облик

$$\mathscr{A}=\begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix}$$

на основу кога се може написати натрични облик дефекта

$$\mathscr{A}-\lambda\mathscr{I}=\begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} X-\lambda I_m & 0 \\ 0 & Z-\lambda I_{n-m} \end{bmatrix}=(X-\lambda I_m)(Z-\lambda I_{n-m})$$

одакле је онда

$$\det\left(\mathscr{A}-\lambda\mathscr{I}\right)=\det\left[(X-\lambda I_m)(Z-\lambda I_{n-m})\right]=\det(X-\lambda I_m)\det(Z-\lambda I_{n-m})$$

Пошто је

$$X=a\,I_m$$

биће

$$\begin{aligned}\det\left(\mathscr{A}-\lambda\mathscr{I}\right)&=\det(a\,I_m-\lambda I_m)\det(Z-\lambda I_{n-m})\\ &=\begin{vmatrix} a-\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a-\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-\lambda \end{vmatrix}\det(Z-\lambda I_{n-m})=(a-\lambda)^m\det(Z-\lambda I_{n-m})\end{aligned}$$

Из овог израза је јасно да алгебарски мултиплицитет својствене вредности a мора бити барем једнак m, тј. једнак геометријском мултиплицитету.

(б) На основу својственог проблема

$$\hat{A}|v\rangle = a|v\rangle$$

следи да је

$$(\hat{A} - a\hat{I})|v\rangle = |0\rangle$$

илити

$$(\hat{A} - a\hat{I})|v\rangle = 0|v\rangle,$$

одакле је јасно да је својствени потпростор својствене вредности a управо *нул-простор* дефекта оператора $\hat{A} - a\hat{I}$.

Нул-простор чине сви они вектори чија је својствена вредност једнака нули.

(10.3) Показати да оператор у простору $\mathbb{R}^3$, дефинисан формулом

$$\hat{A}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = (2\xi_1 - 10\xi_2 + 6\xi_3, 8\xi_1 - 15\xi_2 - \xi_3, 16\xi_1 - 15\xi_2 + 3\xi_3)$$

има само једну својствену вредност, те је његов алгебарски мултиплицитет једнак јединици. Како он мора бити већи од геометријског, овај је онда једнак нули, те дати оператор нема својствених вектора, те се не може дијагонализовати трансформацијом сличности са несингуларним оператором.

Задати оператор ће у апсолутном базису

$$\left\{ |\mathrm{e}_1\rangle = (1,0,0), |\mathrm{e}_2\rangle = (0,1,0), |\mathrm{e}_3\rangle = (0,0,1) \right\}$$

бити представљен матрицом добијеном на основу представљања ликова апсолутног базиса као линеарних комбинација вектора апсолутног базиса, према основној формули репрезентовања

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{A}|\mathrm{e}_1\rangle = \hat{A}(1,0,0) = (2,8,16) = 2|\mathrm{e}_1\rangle + 8|\mathrm{e}_2\rangle + 16|\mathrm{e}_3\rangle \\ \hat{A}|\mathrm{e}_2\rangle = \hat{A}(0,1,0) = (-10,-15,-15) = -10|\mathrm{e}_1\rangle - 15|\mathrm{e}_2\rangle - 15|\mathrm{e}_3\rangle \\ \hat{A}|\mathrm{e}_3\rangle = \hat{A}(0,0,1) = (6,-1,3) = 6|\mathrm{e}_1\rangle - |\mathrm{e}_2\rangle + 3|\mathrm{e}_3\rangle \end{array} \right. \Rightarrow \mathscr{A} = \left[\hat{A}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 2 & -10 & 6 \\ 8 & -15 & -1 \\ 16 & -15 & 3 \end{bmatrix}$$

Својствени проблем задатог оператора

$$\hat{A}|v\rangle = \lambda|v\rangle$$

може се написати у матричном облику као

$$\mathscr{A}\xi = \lambda\xi$$

односно

$$\begin{bmatrix} 2 & -10 & 6 \\ 8 & -15 & -1 \\ 16 & -15 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2\xi_1 - 10\xi_2 + 6\xi_3 \\ 8\xi_1 - 15\xi_2 - \xi_3 \\ 16\xi_1 - 15\xi_2 + 3\xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\xi_1 \\ \lambda\xi_2 \\ \lambda\xi_3 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2\xi_1 - 10\xi_2 + 6\xi_3 \\ 8\xi_1 - 15\xi_2 - \xi_3 \\ 16\xi_1 - 15\xi_2 + 3\xi_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda\xi_1 \\ \lambda\xi_2 \\ \lambda\xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2\xi_1 - 10\xi_2 + 6\xi_3 - \lambda\xi_1 \\ 8\xi_1 - 15\xi_2 - \xi_3 - \lambda\xi_2 \\ 16\xi_1 - 15\xi_2 + 3\xi_3 - \lambda\xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} (2-\lambda)\xi_1 - 10\xi_2 + 6\xi_3 \\ 8\xi_1 - (15+\lambda)\xi_2 - \xi_3 \\ 16\xi_1 - 15\xi_2 + (3-\lambda)\xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

што се може на крају записати као

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & -10 & 6 \\ 8 & -15-\lambda & -1 \\ 16 & -15 & 3-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

У горњем изразу барем један матрични елемент друге матрице са леве стране мора бити различит од нуле; у супротном својствени проблем гласио $\hat{A}|0\rangle = \lambda|0\rangle$, што важи за буквално сваки оператор, те би решење својственог проблема било тривијално. То значи да детерминанта тражене матрице мора бити једнака нули, јер у противном горња матрична формула не би била тачна. Следи

$$\det\begin{bmatrix} 2-\lambda & -10 & 6 \\ 8 & -15-\lambda & -1 \\ 16 & -15 & 3-\lambda \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -10 & 6 \\ 8 & -15-\lambda & -1 \\ 16 & -15 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0\,.$$

Развијањем горње детерминанте добијају се тражене својствене вредности

$$(2-\lambda)\,(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -15-\lambda & -1 \\ -15 & 3-\lambda \end{vmatrix} + (-10)\,(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 8 & -1 \\ 16 & 3-\lambda \end{vmatrix} + 6\,(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 8 & -15-\lambda \\ 16 & -15 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow\ (2-\lambda)\left[(-15-\lambda)(3-\lambda)-15\right]+10\left[8(3-\lambda)+16\right]+6\left[-8\cdot 15+16(15+\lambda)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\ (2-\lambda)(-45-3\lambda+15\lambda+\lambda^2-15)+10(24-8\lambda+16)+6(-120+240+16\lambda)=0$$

$$\Leftrightarrow\ (2-\lambda)(\lambda^2+12\lambda-60)+10(40-8\lambda)+6(120+16\lambda)=0$$

$$\Leftrightarrow\ 2\lambda^2+24\lambda-120-\lambda^3-12\lambda^2+60\lambda+400-80\lambda+720+96\lambda=0$$

$$\Leftrightarrow\ -\lambda^3-10\lambda^2+(24+60-80+96)\lambda+(720+400-120)=0$$

$$\Leftrightarrow\ -\lambda^3-10\lambda^2+100\lambda+1000=0$$

$$\Leftrightarrow\ -\lambda^3-20\lambda^2+10\lambda^2+200\lambda-100\lambda+1000=0$$

$$\Leftrightarrow 10\lambda^2+200\lambda+1000-\lambda^3-20\lambda^2-100\lambda=0$$

$$\Leftrightarrow 10(\lambda^2+20\lambda+100)-\lambda(\lambda^2+20\lambda+100)=0$$

$$\Leftrightarrow (10-\lambda)(\lambda^2+20\lambda+100)=0$$

$$\Leftrightarrow (10-\lambda)(\lambda+10)^2=0$$

те *карактеристична једначина* својственог проблема има облик

$$(10-\lambda)(10+\lambda)(10+\lambda)=0\,,$$

одакле се лепо види да су својствене вредности

$$\lambda_1=10\,,\ \lambda_2=-10\ \text{и}\ \lambda_3=-10\,.$$

Друга и трећа својствена вредност су једнаке, те уствари постоје само две различите својствене вредности, што значи да је алгебарски мултиплицитет једнак 2.

Да би алгебарски мултиплицитет својствене вредности $\lambda_{2,3}=-10$ био већи од геометријског, број својствених вектора који њој одговарају мора бити једнак јединици. Компоненте својствених вектора добијају се враћањем ове својствене вредности у матричну формулу

$$\begin{bmatrix} (2-\lambda_{2,3})\xi_1-10\xi_2+6\xi_3 \\ 8\xi_1-(15+\lambda_{2,3})\xi_2-\xi_3 \\ 16\xi_1-15\xi_2+(3-\lambda_{2,3})\xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Изједначавањем одговарајућих компоненти леве и десне матрице-колоне добија се систем једначина

$$\left\{\begin{array}{l}(2+10)\xi_1-10\xi_2+6\xi_3=0\\ 8\xi_1-(15-10)\xi_2-\xi_3=0\\ 16\xi_1-15\xi_2+(3+10)\xi_3=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}12\xi_1-10\xi_2+6\xi_3=0\\ 8\xi_1-5\xi_2-\xi_3=0\\ 16\xi_1-15\xi_2+13\xi_3=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}6\xi_1-5\xi_2+3\xi_3=0\\ 8\xi_1-5\xi_2-\xi_3=0\ /\cdot(-1)\\ 16\xi_1-15\xi_2+13\xi_3=0\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}6\xi_1-5\xi_2+3\xi_3=0\\ -8\xi_1+5\xi_2+\xi_3=0\\ 16\xi_1-15\xi_2+13\xi_3=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}6\xi_1-5\xi_2+3\xi_3=0\\ -2\xi_1+4\xi_3=0\\ 16\xi_1-15\xi_2+13\xi_3=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}6\xi_1-5\xi_2+3\xi_3=0\\ \xi_1=2\xi_3\\ 16\xi_1-15\xi_2+13\xi_3=0\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}12\xi_3-5\xi_2+3\xi_3=0\\ \xi_1=2\xi_3\\ 16\xi_1-15\xi_2+13\xi_3=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}15\xi_3-5\xi_2=0\\ \xi_1=2\xi_3\\ 16\xi_1-15\xi_2+13\xi_3=0\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\xi_2=3\xi_3\\ \xi_1=2\xi_3\\ 16\xi_1-15\xi_2+13\xi_3=0\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\xi_2=3\xi_3\\ \xi_1=2\xi_3\\ 32\xi_3-45\xi_3+13\xi_3=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\xi_2=3\xi_3\\ \xi_1=2\xi_3\\ 0\cdot\xi_3=0\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\xi_2=3\xi_3\\ \xi_1=2\xi_3\\ \xi_3\in\mathbb{R}\end{array}\right.$$

чијим је решавањем добијено да је трећа компонента својственог вектора произвољан реалан број. Пошто прва и друга компонента зависе од ње, она не може бити једнака нули, јер би се у том случају као решење својственог проблема добио *нулти вектор*: $|\,0\rangle=(0,0,0)$, који је решење својственог проблема буквално сваког оператора, те је самим тим тривијално и непотребно решење. Најпростија могућност која ће дати нетривијално решење својственог проблема јесте узети да је $\xi_3=1$, чиме се добија да је $\xi_1=2$ и $\xi_2=3$, те је својствени вектор који одговара дегенерисаној својственој вредности вектор

$$|\,v_{2,3}\rangle=(2,3,1),$$

што значи да за дати оператор стварно постоји једна својствена вредност $\lambda_{2,3}=-10$ за коју је геометријски мултиплицитет 1 мањи од алгебарског 2.

(10.4) Доказати следеће ставове

(а) $|v\rangle$ је својствени вектор оператора $\hat{A}$ који одговара својственој вредности $a=0$ акко $|v\rangle$ припада нул-простору;

(б) ако је $|v\rangle$ својствени вектор оператора $\hat{A}$ који одговара својственој вредности $a \neq 0$, онда $|v\rangle$ припада потпростору ликова оператора $\hat{A}$.

(а) Својствени проблем оператора $\hat{A}$ у општем облику гласи

$$\hat{A}|v\rangle = a|v\rangle .$$

За својствену вредност $a=0$ он поприма облик

$$\hat{A}|v\rangle = 0|v\rangle$$

што је једнако

$$\hat{A}|v\rangle = |0\rangle ,$$

одакле следи да је

$$|v\rangle \in \mathbb{N}(\hat{A})$$

пошто је нул-потпростор $\mathbb{N}(\hat{A})$ оператора $\hat{A}$ потпростор кога образују сви објекти пресликавања $|v\rangle$ који након деловања оператора $\hat{A}$ постају нулти ликови пресликавања $|0\rangle$.

(б) Својствени проблем задатог оператора у општем облику

$$\hat{A}|v\rangle = a|v\rangle$$

за својствену вредност $a \neq 0$ може се написати као

$$a|v\rangle = a|v\rangle$$

односно

$$|v\rangle = \frac{1}{a} a|v\rangle$$

одакле следи да је

$$|v\rangle \in \mathbb{R}(\hat{A}),$$

тј. да вектор $|v\rangle$ припада потпростору ликова (*домету*) оператора $\hat{A}$.

(10.5) Ако за било који природни број k важи да је оператор $\hat{A}^k = \hat{0}$, где је $\hat{A}$ нил-потентни оператор, показати да оператор $\hat{A}$ нема *ненулте* својствене вредности.

Из својственог проблема нил-потентног оператора

$$\hat{A}|v\rangle = a|v\rangle .$$

следи да је

$$\hat{A}^k|v\rangle = a^k|v\rangle .$$

Сад постоје две могућности. Прво, да је $a^k \neq 0$ за било који природни број k, што доводи до тога да је $\hat{A}^k \neq \hat{0}$. Друго, да је $a^k = 0$ за било који природни број k, чија је последица да је $\hat{A}^k = \hat{0}$, што одговара поставци задатка, те заиста оператор $\hat{A}$ не може имати *ненулте* својствене вредности ако је за било који природни број k оператор $\hat{A}^k = \hat{0}$.

(10.6) Показати на два начина, и директно и преко спектралне форме, да за *нормални* оператор $\hat{A}$ ($\hat{A}\hat{A}^{\dagger}=\hat{A}^{\dagger}\hat{A}$) важи

(а) да је $\hat{A}|v\rangle=|0\rangle$ акко је $\hat{A}^{\dagger}|v\rangle=|0\rangle$;

(б) да је сваки својствени вектор оператора $\hat{A}$ такође и својствени вектор оператора $\hat{A}^{\dagger}$, с тим што онда одговара *комплексно коњугованој* својственој вредности;

(в) својствени вектори оператора $\hat{A}$ који одговарају различитим својственим вредностима међусобно су *ортогонални*.

(а) Из у поставци задатка наведене особине за нормалне операторе

$$\hat{A}\hat{A}^{\dagger}=\hat{A}^{\dagger}\hat{A}$$

следи да је

$$\hat{A}\hat{A}^{\dagger}|v\rangle=\hat{A}^{\dagger}\hat{A}|v\rangle.$$

Сада се од горњег израза формира скаларни производ

$$\left\langle\hat{A}\hat{A}^{\dagger}\langle v|\middle|v\right\rangle=\left\langle\hat{A}^{\dagger}\hat{A}\langle v|\middle|v\right\rangle$$

одакле се добија, узимањем у обзир дефиниционе релације адјунгованих оператора

$$\left\langle\hat{A}^{\dagger}\langle v|\middle|\hat{A}^{\dagger}|v\rangle\right\rangle=\left\langle\hat{A}\langle v|\middle|\hat{A}|v\rangle\right\rangle.$$

Како је у поставци задатка дато да је $\hat{A}^{\dagger}|v\rangle=|0\rangle$, биће

$$\langle 0|0\rangle=\left\langle\hat{A}\langle v|\middle|\hat{A}|v\rangle\right\rangle$$

те је заиста

$$\hat{A}|v\rangle=|0\rangle.$$

(б) Својствена једнакост $\hat{A}|v\rangle=\lambda|v\rangle$ нормалног оператора $\hat{A}$ може да се напише и као

$$(\hat{A}-\lambda\hat{I})|v\rangle=|0\rangle$$

те је и $\hat{A}-\lambda\hat{I}$ нормалан оператор.

Сад, на основу већ доказаног исказа (а), да је $\hat{A}|v\rangle=|0\rangle$ акко је $\hat{A}^{\dagger}|v\rangle=|0\rangle$, следи да је, ако је оператор $(\hat{A}-\lambda\hat{I})|v\rangle=|0\rangle$ онда је и

$$(\hat{A}-\lambda\hat{I})^{\dagger}|v\rangle=|0\rangle$$

одакле следи

$$(\hat{A}^{\dagger}-\lambda^{*}\hat{I}^{\dagger})|v\rangle=|0\rangle$$

а што је, опет, еквивалентно исказу

$$\hat{A}^{\dagger}|v\rangle = \lambda^{*}\hat{I}^{\dagger}|v\rangle$$

односно, пошто је $\hat{I}$ ермитски оператор: $\hat{I}^{\dagger} = \hat{I}$ који оставља било који вектор непромењеним, коначно се добија тражена формула

$$\hat{A}^{\dagger}|v\rangle = \lambda^{*}|v\rangle .$$

(в) Две својствене једнакости оператора $\hat{A}$ (за две различите својствене вредности којима одговарају два различита својствена вектора) биле би

$$\hat{A}|v_1\rangle = \lambda_1|v_1\rangle$$
$$\hat{A}|v_2\rangle = \lambda_2|v_2\rangle$$

Сада се формира скаларни производ првог својственог вектора и лика другог својственог вектора, уз узимање у обзир дефиниционе формуле за адјунговане операторе

$$\left\langle v_1 \middle| \hat{A}|v_2\rangle \right\rangle = \left\langle \hat{A}^{\dagger}\langle v_1| \middle| v_2 \right\rangle .$$

На основу показаног исказа (б) је $\hat{A}^{\dagger}\langle v_1| = \lambda_1^{*}\langle v_1|$, те следи

$$\left\langle v_1 \middle| \lambda_2|v_2\rangle \right\rangle = \left\langle \lambda_1^{*}\langle v_1| \middle| v_2 \right\rangle .$$

Према дефиницији скаларног производа, он је хомоген по другом фактору а антихомоген по првом, те се добија

$$\lambda_2\langle v_1|v_2\rangle = \lambda_1\langle v_1|v_2\rangle .$$

Пошто су према поставци својствене вредности различите: $\lambda_2 \neq \lambda_1$, да би важила једнакост између леве и десне стране горњег израза мора бити

$$\langle v_1|v_2\rangle = 0$$

чиме је показано да су својствени вектори који одговарају *различитим* својственим вредностима заиста међусобно *ортогонални*.

(10.7) Показати да матрице

$$\mathscr{A}=\begin{bmatrix}1 & -3 & 3\\ 3 & -5 & 3\\ 6 & -6 & 4\end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathscr{B}=\begin{bmatrix}-3 & 1 & -1\\ -7 & 5 & -1\\ -6 & 6 & -2\end{bmatrix}$$

имају *исте* карактеристичне полиноме а потом одредити њихове својствене вредности.

Показати да се матрица $\mathscr{A}$ *може* дијагонализовати трансформацијом сличности, а да матрица $\mathscr{B}$ *не може*, пошто има својствену вредност чији је геометријски мултиплицитет мањи од алгебарског мултиплицитета матрице.

На основу тога закључити да матрица $\mathscr{A}$ и матрица $\mathscr{B}$ нису *сличне* матрице, премда им је карактеристични полином једнак.

Може ли се матрица $\mathscr{A}$ дијагонализовати у *ортонормираном* базису?

Почиње се са својственим проблемом првог оператора

$$\hat{A}|v\rangle=\lambda_a|v\rangle$$

који се у матричном облику може написати као

$$\mathscr{A}\xi=\lambda_a\xi$$

односно

$$\begin{bmatrix}1 & -3 & 3\\ 3 & -5 & 3\\ 6 & -6 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{bmatrix}=\lambda_a\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}\xi_1-3\xi_2+3\xi_3\\ 3\xi_1-5\xi_2+3\xi_3\\ 6\xi_1-6\xi_2+4\xi_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_a\xi_1\\ \lambda_a\xi_2\\ \lambda_a\xi_3\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}\xi_1-3\xi_2+3\xi_3\\ 3\xi_1-5\xi_2+3\xi_3\\ 6\xi_1-6\xi_2+4\xi_3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda_a\xi_1\\ \lambda_a\xi_2\\ \lambda_a\xi_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}\xi_1-3\xi_2+3\xi_3-\lambda_a\xi_1\\ 3\xi_1-5\xi_2+3\xi_3-\lambda_a\xi_2\\ 6\xi_1-6\xi_2+4\xi_3-\lambda_a\xi_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}\xi_1-\lambda_a\xi_1-3\xi_2+3\xi_3\\ 3\xi_1-5\xi_2-\lambda_a\xi_2+3\xi_3\\ 6\xi_1-6\xi_2+4\xi_3-\lambda_a\xi_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}(1-\lambda_a)\xi_1-3\xi_2+3\xi_3\\ 3\xi_1-(5+\lambda_a)\xi_2+3\xi_3\\ 6\xi_1-6\xi_2+(4-\lambda_a)\xi_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

те се добија матрична једначина

$$\begin{bmatrix}1-\lambda_a & -3 & 3\\ 3 & -5-\lambda_a & 3\\ 6 & -6 & 4-\lambda_a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}.$$

Матрица-колона на левој страни мора имати барем један матрични елемент различит од нуле, у супротном би представљала нулти вектор који је тривијално решење својственог проблема. Како је матрица-колона на десној страни једнака нули, то квадратна матрица на левој страни мора бити једнака нули. Међутим, како матрица представља шему бројева а не један број, то уствари њена детерминанта мора да буде једнака нули

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda_a & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda_a & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda_a \end{vmatrix} = 0\,.$$

Решавањем овог израза

$$(-1)^{1+1}(1-\lambda_a)\begin{vmatrix} -5-\lambda_a & 3 \\ -6 & 4-\lambda_a \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}(-3)\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 4-\lambda_a \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}3\begin{vmatrix} 3 & -5-\lambda_a \\ 6 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow\ (1-\lambda_a)\left[(-5-\lambda_a)(4-\lambda_a)+18\right]+3\left[3(4-\lambda_a)-18\right]+3\left[-18-6(-5-\lambda_a)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\ (1-\lambda_a)(-20-4\lambda_a+5\lambda_a+\lambda_a^2+18)+3(12-3\lambda_a-18)+3(-18+30+6\lambda_a)=0$$

$$\Leftrightarrow\ (1-\lambda_a)(\lambda_a^2+\lambda_a-2)+3(12-3\lambda_a-18-18+30+6\lambda_a)=0$$

$$\Leftrightarrow\ (\lambda_a^2+\lambda_a-2-\lambda_a^3-\lambda_a^2+2\lambda_a)+3(42-36+6\lambda_a-3\lambda_a)=0$$

$$\Leftrightarrow\ (-\lambda_a^3+3\lambda_a-2)+3(3\lambda_a+6)=0$$

добија се *карактеристични полином* односно *карактеристична једначина* матрице $\mathscr{A}$

$$-\lambda_a^3+12\lambda_a+16=0\,.$$

Сада се ради својствени проблем другог оператора

$$\hat{B}|v\rangle = \lambda_b|v\rangle$$

који је у матричном облику записив као

$$\mathscr{B}\eta = \lambda_b\eta$$

то јест

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} = \lambda_b\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -3\eta_1+\eta_2-\eta_3 \\ -7\eta_1+5\eta_2-\eta_3 \\ -6\eta_1+6\eta_2-2\eta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_b\eta_1 \\ \lambda_b\eta_2 \\ \lambda_b\eta_3 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -3\eta_1+\eta_2-\eta_3 \\ -7\eta_1+5\eta_2-\eta_3 \\ -6\eta_1+6\eta_2-2\eta_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda_b\eta_1 \\ \lambda_b\eta_2 \\ \lambda_b\eta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -3\eta_1+\eta_2-\eta_3-\lambda_b\eta_1 \\ -7\eta_1+5\eta_2-\eta_3-\lambda_b\eta_2 \\ -6\eta_1+6\eta_2-2\eta_3-\lambda_b\eta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -3\eta_1-\lambda_b\eta_1+\eta_2-\eta_3 \\ -7\eta_1+5\eta_2-\lambda_b\eta_2-\eta_3 \\ -6\eta_1+6\eta_2-2\eta_3-\lambda_b\eta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} (-3-\lambda_b)\eta_1+\eta_2-\eta_3 \\ -7\eta_1+(5-\lambda_b)\eta_2-\eta_3 \\ -6\eta_1+6\eta_2+(-2-\lambda_b)\eta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

чиме је добијена матрична једначина

$$\begin{bmatrix} -3-\lambda_b & 1 & -1 \\ -7 & 5-\lambda_b & -1 \\ -6 & 6 & -2-\lambda_b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Из истих разлога као у случају прве матрице, детерминанта друге матрице мора бити једнака нули

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda_b & 1 & -1 \\ -7 & 5-\lambda_b & -1 \\ -6 & 6 & -2-\lambda_b \end{vmatrix} = 0 .$$

Решавањем горње формуле

$$(-1)^{1+1}(-3-\lambda_b)\begin{vmatrix} 5-\lambda_b & -1 \\ 6 & -2-\lambda_b \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}1\begin{vmatrix} -7 & -1 \\ -6 & -2-\lambda_b \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}(-1)\begin{vmatrix} -7 & 5-\lambda_b \\ -6 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow\ (-3-\lambda_b)\left[(5-\lambda_b)(-2-\lambda_b)+6\right]-\left[-7(-2-\lambda_b)-6\right]-\left[-42+6(5-\lambda_b)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\ (-3-\lambda_b)(-10+2\lambda_b-5\lambda_b+\lambda_b^2+6)-(14+7\lambda_b-6)-(-42+30-6\lambda_b)=0$$

$$\Leftrightarrow\ (-3-\lambda_b)(\lambda_b^2-3\lambda_b-4)-8-7\lambda_b+12+6\lambda_b=0$$

$$\Leftrightarrow\ (3+\lambda_b)(-\lambda_b^2+3\lambda_b+4)+4-\lambda_b=0$$

$$\Leftrightarrow\ -3\lambda_b^2-\lambda_b^3+9\lambda_b+3\lambda_b^2+12+4\lambda_b+4-\lambda_b=0$$

$$\Leftrightarrow\ -\lambda_b^3+9\lambda_b+4\lambda_b-\lambda_b+16=0$$

следи *карактеристични полином* (*карактеристична једначина*) матрице $\mathscr{B}$

$$-\lambda_b^3+12\lambda_b+16=0$$

која је, као што је и наведено у поставци задатка, заиста једнака карактеристичној једначини (карактеристичном полиному) матрице $\mathscr{A}$.

Сада треба решити горњи својствени полином

$$-\lambda_{a,b}^3+16\lambda_{a,b}-4\lambda_{a,b}+16=0\ \Leftrightarrow\ -\lambda_{a,b}^3+16\lambda_{a,b}-4\lambda_{a,b}+16+4\lambda_{a,b}^2-4\lambda_{a,b}^2=0$$

$$\Leftrightarrow\ -\lambda_{a,b}^3-4\lambda_{a,b}^2-4\lambda_{a,b}+4\lambda_{a,b}^2+16\lambda_{a,b}+16=0$$

$$\Leftrightarrow\ -\lambda_{a,b}(\lambda_{a,b}^2+4\lambda_{a,b}+4)+4(\lambda_{a,b}^2+4\lambda_{a,b}+4)=0$$

$$\Leftrightarrow\ (-\lambda_{a,b}+4)(\lambda_{a,b}^2+4\lambda_{a,b}+4)=0$$

$$\Leftrightarrow\ (-\lambda_{a,b}+4)(\lambda_{a,b}+2)^2=0\ \Leftrightarrow\ (-\lambda_{a,b}+4)(\lambda_{a,b}+2)(\lambda_{a,b}+2)=0$$

чиме се добијају својствене вредности, заједничке за обе матрице

$$\lambda_{a,b\,(1)}=-2$$
$$\lambda_{a,b\,(2)}=-2$$
$$\lambda_{a,b\,(3)}=4$$

односно, пошто су прве две својствене вредности једнаке, пишу се као једна, која се назива *дегенерисаном* својственом вредношћу (одговарају јој два *различита* својствена вектора)

$$\lambda_{a,b\,(1,2)}=-2$$
$$\lambda_{a,b\,(3)}=4$$

Као следеће, треба одредити својствене векторе прве матрице. У ту сврху треба се вратити раније добијеној матричној једначини

$$\begin{bmatrix} (1-\lambda_a)\xi_1 - 3\xi_2 + 3\xi_3 \\ 3\xi_1 - (5+\lambda_a)\xi_2 + 3\xi_3 \\ 6\xi_1 - 6\xi_2 + (4-\lambda_a)\xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

која се може схватити и као систем од три једначине са три непознате

$$\begin{cases} (1-\lambda_a)\xi_1 - 3\xi_2 + 3\xi_3 = 0 \\ 3\xi_1 - (5+\lambda_a)\xi_2 + 3\xi_3 = 0 \\ 6\xi_1 - 6\xi_2 + (4-\lambda_a)\xi_3 = 0 \end{cases}$$

Прво се у овај систем убацује прва, дегенерисана својствена вредност

$$\begin{cases} (1-\lambda_{a\,(1,2)})\xi_1 - 3\xi_2 + 3\xi_3 = 0 \\ 3\xi_1 - (5+\lambda_{a\,(1,2)})\xi_2 + 3\xi_3 = 0 \\ 6\xi_1 - 6\xi_2 + (4-\lambda_{a\,(1,2)})\xi_3 = 0 \end{cases}$$

након чега се добија следећи систем једначина

$$\begin{cases} (1+2)\xi_1 - 3\xi_2 + 3\xi_3 = 0 \\ 3\xi_1 - (5-2)\xi_2 + 3\xi_3 = 0 \\ 6\xi_1 - 6\xi_2 + (4+2)\xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\xi_1 - 3\xi_2 + 3\xi_3 = 0 \\ 3\xi_1 - 3\xi_2 + 3\xi_3 = 0 \\ 6\xi_1 - 6\xi_2 + 6\xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 - \xi_2 + \xi_3 = 0 \\ \xi_1 - \xi_2 + \xi_3 = 0 \\ \xi_1 - \xi_2 + \xi_3 = 0 \end{cases}$$

који и није систем, пошто уствари постоји само једна једначина са три непознате што значи да се две непознате не могу прецизно одредити већ се морају одабрати произвољно

$$\begin{cases} \xi_1 - \xi_2 + \xi_3 = 0 \\ \xi_1 - \xi_2 + \xi_3 = 0 \\ \xi_1 - \xi_2 + \xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = \xi_2 - \xi_3 \\ \xi_1 - \xi_2 + \xi_3 = 0 \\ \xi_1 - \xi_2 + \xi_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi_1 = \xi_2 - \xi_3 \\ \xi_2 - \xi_3 - \xi_2 + \xi_3 = 0 \\ \xi_2 - \xi_3 - \xi_2 + \xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = \xi_2 - \xi_3 \\ \xi_2 - \xi_2 + \xi_3 - \xi_3 = 0 \\ \xi_2 - \xi_2 + \xi_3 - \xi_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = \xi_2 - \xi_3 \\ (1-1)\,\xi_2 + (1-1)\,\xi_3 = 0 \\ (1-1)\,\xi_2 + (1-1)\,\xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = \xi_2 - \xi_3 \\ 0\cdot\xi_2 + 0\cdot\xi_3 = 0 \\ 0\cdot\xi_2 + 0\cdot\xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = \xi_2 - \xi_3 \\ 0\cdot\xi_2 = 0 \\ 0\cdot\xi_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi_1 = \xi_2 - \xi_3 \\ \xi_2 \in \mathbb{R} \\ \xi_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Најједноставније је одабрати да је $\xi_2 = 1$ и $\xi_3 = 0$ што даје $\xi_1 = 1$, а потом узети обрнуто, да је $\xi_2 = 0$ и $\xi_3 = 1$ што даје $\xi_1 = -1$; овако су добијена прва два својствена вектора матрице $\mathscr{A}$

$$\left|v_{a\,(1)}\right\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \left|v_{a\,(2)}\right\rangle = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Потом се у матричну једначину убаци друга, недегенерисана својствена вредност

$$\begin{cases} (1-\lambda_{a\,(3)})\xi_1 - 3\xi_2 + 3\xi_3 = 0 \\ 3\xi_1 - (5+\lambda_{a\,(3)})\xi_2 + 3\xi_3 = 0 \\ 6\xi_1 - 6\xi_2 + (4-\lambda_{a\,(3)})\xi_3 = 0 \end{cases}$$

што даје следећи систем једначина

$$\begin{cases}(1-4)\xi_1-3\xi_2+3\xi_3=0\\ 3\xi_1-(5+4)\xi_2+3\xi_3=0\\ 6\xi_1-6\xi_2+(4-4)\xi_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3\xi_1-3\xi_2+3\xi_3=0\\ 3\xi_1-9\xi_2+3\xi_3=0\\ 6\xi_1-6\xi_2+0\xi_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\xi_1+\xi_2-\xi_3=0\\ \xi_1-3\xi_2+\xi_3=0\\ \xi_1-\xi_2=0\end{cases}$$

чијим се решавањем

$$\begin{cases}\xi_1+\xi_2-\xi_3=0\\ \xi_1-3\xi_2+\xi_3=0\\ \xi_1-\xi_2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\xi_1+\xi_2-\xi_3=0\\ \xi_1-3\xi_2+\xi_3=0\\ \xi_1=\xi_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\xi_1+\xi_2-\xi_3=0\\ \xi_2-3\xi_2+\xi_3=0\\ \xi_1=\xi_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\xi_1+\xi_2-\xi_3=0\\ -2\xi_2+\xi_3=0\\ \xi_1=\xi_2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\xi_1+\xi_2-\xi_3=0\\ \xi_3=2\xi_2\\ \xi_1=\xi_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\xi_2+\xi_2-2\xi_2=0\\ \xi_3=2\xi_2\\ \xi_1=\xi_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\cdot\xi_2=0\\ \xi_3=2\xi_2\\ \xi_1=\xi_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\xi_2\in\mathbb{R}\\ \xi_3=2\xi_2\\ \xi_1=\xi_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\xi_1=\xi_2\\ \xi_2\in\mathbb{R}\\ \xi_3=2\xi_2\end{cases}$$

Овде се само друга компонента својственог вектора бира произвољно, док прва и трећа зависе од ње; најлакше је за ξ_2 одабрати нулу, али би то дало тривијално решење - нулти вектор, стога се узима следеће најпростије, а то је јединица: $\xi_2=1$, што даје $\xi_1=1$ и $\xi_3=2$. Овим је добијен трећи својствени вектор матрице $\mathscr{A}$

$$|v_{a\,(3)}\rangle=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}.$$

Значи, за прву матрицу добијен је скуп од *три* различита својствена вектора

$$\left\{|v_{a\,(1)}\rangle=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},|v_{a\,(2)}\rangle=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix},|v_{a\,(3)}\rangle=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}\right\}$$

за *две* својствене вредности: $\lambda_{a\,(1,2)}=-2$ (као дегенерисаној одговарају јој први и други својствени вектор) и $\lambda_{a\,(3)}=4$ (као дегенерисаној одговара јој трећи својствени вектор).

На овом месту се одређују својствени вектори друге матрице. У ту сврху треба се вратити раније добијеној другој матричној једначини

$$\begin{bmatrix}(-3-\lambda_b)\eta_1+\eta_2-\eta_3\\ -7\eta_1+(5-\lambda_b)\eta_2-\eta_3\\ -6\eta_1+6\eta_2+(-2-\lambda_b)\eta_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

која уствари представља запис система од три једначине са три непознате

$$\begin{cases}(-3-\lambda_b)\eta_1+\eta_2-\eta_3=0\\ -7\eta_1+(5-\lambda_b)\eta_2-\eta_3=0\\ -6\eta_1+6\eta_2+(-2-\lambda_b)\eta_3=0\end{cases}$$

Прво се у овај систем убацује прва, дегенерисана својствена вредност

$$\begin{cases} (-3-\lambda_{b(1,2)})\eta_1+\eta_2-\eta_3=0 \\ -7\eta_1+(5-\lambda_{b(1,2)})\eta_2-\eta_3=0 \\ -6\eta_1+6\eta_2+(-2-\lambda_{b(1,2)})\eta_3=0 \end{cases}$$

након чега се добија следећи систем једначина

$$\begin{cases} (-3+2)\eta_1+\eta_2-\eta_3=0 \\ -7\eta_1+(5+2)\eta_2-\eta_3=0 \\ -6\eta_1+6\eta_2+(-2+2)\eta_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\eta_1+\eta_2-\eta_3=0 \\ -7\eta_1+7\eta_2-\eta_3=0 \\ -6\eta_1+6\eta_2+0\eta_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \eta_1-\eta_2+\eta_3=0 \\ 7\eta_1-7\eta_2+\eta_3=0 \\ \eta_1-\eta_2=0 \end{cases}$$

чијим се решавањем добијају следеће компоненте

$$\begin{cases} \eta_1-\eta_2+\eta_3=0 \\ 7\eta_1-7\eta_2+\eta_3=0 \\ \eta_1-\eta_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \eta_1-\eta_2+\eta_3=0 \\ 7\eta_1-7\eta_2+\eta_3=0 \\ \eta_1=\eta_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \eta_2-\eta_2+\eta_3=0 \\ 7\eta_1-7\eta_2+\eta_3=0 \\ \eta_1=\eta_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \eta_3=0 \\ 7\eta_1-7\eta_2+\eta_3=0 \\ \eta_1=\eta_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \eta_3=0 \\ 7\eta_1-7\eta_2=0 \\ \eta_1=\eta_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \eta_3=0 \\ \eta_1-\eta_2=0 \\ \eta_1=\eta_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \eta_3=0 \\ \eta_2-\eta_2=0 \\ \eta_1=\eta_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \eta_3=0 \\ 0\cdot\eta_2=0 \\ \eta_1=\eta_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \eta_3=0 \\ \eta_2\in\mathbb{R} \\ \eta_1=\eta_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \eta_1=\eta_2 \\ \eta_2\in\mathbb{R} \\ \eta_3=0 \end{cases}$$

Да би се избегло тривијално решење (нулти вектор), најједноставније је одабрати да је $\eta_2=1$, те је онда $\eta_1=1$, те је онда својствени вектор матрице $\mathscr{B}$

$$|v_{b\,(1)}\rangle=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}.$$

Пошто је својствена вредност $\lambda_{b\,(1,2)}=-2$ дегенерисана, њој би морали да одговарају два, а не само један својствени вектор - значи да је геометријски мултиплицитет својствене вредности $\lambda_{b\,(1,2)}=-2$ код матрице $\mathscr{B}$ једнак јединици.

Потом се у матричну једначину убаци друга, недегенерисана својствена вредност

$$\begin{cases} (-3-\lambda_{b\,(3)})\eta_1+\eta_2-\eta_3=0 \\ -7\eta_1+(5-\lambda_{b\,(3)})\eta_2-\eta_3=0 \\ -6\eta_1+6\eta_2+(-2-\lambda_{b\,(3)})\eta_3=0 \end{cases}$$

што даје следећи систем једначина

$$\begin{cases} (-3-4)\eta_1+\eta_2-\eta_3=0 \\ -7\eta_1+(5-4)\eta_2-\eta_3=0 \\ -6\eta_1+6\eta_2+(-2-4)\eta_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7\eta_1+\eta_2-\eta_3=0 \\ -7\eta_1+\eta_2-\eta_3=0 \\ -6\eta_1+6\eta_2-6\eta_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7\eta_1-\eta_2+\eta_3=0 \\ 7\eta_1-\eta_2+\eta_3=0 \\ \eta_1-\eta_2+\eta_3=0 \end{cases}$$

чијим се решавањем

$$\begin{cases} 7\eta_1-\eta_2+\eta_3=0 \\ 7\eta_1-\eta_2+\eta_3=0 \\ \eta_1-\eta_2+\eta_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7\eta_1-\eta_2+\eta_3=0 \\ 7\eta_1-\eta_2+\eta_3=0 \\ \eta_1=\eta_2-\eta_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7\eta_1-\eta_2+\eta_3=0 \\ 7\eta_2-7\eta_3-\eta_2+\eta_3=0 \\ \eta_1=\eta_2-\eta_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7\eta_1-\eta_2+\eta_3=0 \\ 6\eta_2-6\eta_3=0 \\ \eta_1=\eta_2-\eta_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7\eta_1-\eta_2+\eta_3=0 \\ \eta_2=\eta_3 \\ \eta_1=\eta_2-\eta_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7\eta_1-\eta_2+\eta_3=0 \\ \eta_2=\eta_3 \\ \eta_1=\eta_3-\eta_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7\eta_1-\eta_2+\eta_3=0 \\ \eta_2=\eta_3 \\ \eta_1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\eta_2+\eta_3=0 \\ \eta_2=\eta_3 \\ \eta_1=0 \end{cases}$$

добијају компоненте

$$\begin{cases} -\eta_3+\eta_3=0 \\ \eta_2=\eta_3 \\ \eta_1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\cdot\eta_3=0 \\ \eta_2=\eta_3 \\ \eta_1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \eta_3\in\mathbb{R} \\ \eta_2=\eta_3 \\ \eta_1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \eta_1=0 \\ \eta_2=\eta_3 \\ \eta_3\in\mathbb{R} \end{cases}$$

Наравно, за трећу компоненту одабира се јединица, а како је друга компонента једнака трећој то ће и она бити јединица. Тако се добија трећи својствени вектор матрице $\mathscr{B}$

$$\left|v_{b\,(3)}\right\rangle=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}.$$

За другу матрицу добијен је следећи скуп од само *два* различита својствена вектора

$$\left\{\left|v_{b\,(1,2)}\right\rangle=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\left|v_{b\,(3)}\right\rangle=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\}.$$

за *две* својствене вредности: $\lambda_{b\,(1,2)}=-2$ (као дегенерисаној требало би да јој одговарају два својствена вектора) и $\lambda_{b\,(3)}=4$ (као недегенерисаној одговара јој трећи својствени вектор).

Како је геометријски мултиплицитет својствене вредности $\lambda_{b\,(1,2)}=-2$ код матрице $\mathscr{B}$ једнак 1 (мањи је од алгебарског мултиплицитета матрице од 2) то матрица $\mathscr{B}$ нема својствени базис - има само два својствена вектора уместо три.

Стога се матрица $\mathscr{B}$ не може дијагонализовати трансформацијом сличности

$$\mathscr{B}_{\mathrm{dij}}=\mathscr{U}^{-1}\mathscr{B}\,\mathscr{U}$$

јер се унитарна матрица $\mathscr{U}$ потребна за ту операцију прави од својствених вектора као

$$\mathscr{U}=\Big[\left|v_{b\,(1)}\right\rangle\Big|\left|v_{b\,(2)}\right\rangle\Big|\left|v_{b\,(3)}\right\rangle\Big]$$

а матрица $\mathscr{B}$ их има само два, те би се добила матрица

$$\mathscr{U}=\Big[\left|v_{b\,(1)}\right\rangle\Big|\,\text{фали}\,\Big|\left|v_{b\,(3)}\right\rangle\Big]=\left[\begin{array}{c|c|c}1&\square&1\\1&\square&1\\0&\square&2\end{array}\right].$$

Насупрот њој, матрица $\mathscr{A}$ може се дијагонализовати трансформацијом сличности

$$\mathscr{A}_{\text{dij}} = \mathscr{U}^{-1}.\mathscr{A}\,\mathscr{U}$$

јер има довољно својствених вектора да се направи унитарна матрица $\mathscr{U}$ потребна за то

$$\mathscr{U} = \Big[\big|v_{a\,(1)}\big\rangle \big|\big|v_{a\,(2)}\big\rangle\big|\big|v_{a\,(3)}\big\rangle\Big] = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Инверзна унитарна матрица $\mathscr{U}^{-1}$ добија се из дефиниционе формуле

$$\mathscr{U}^{-1}\mathscr{U} = \mathscr{I}$$

написане у матричном облику као

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} u_{11}+u_{12} & -u_{11}+u_{13} & u_{11}+u_{12}+2u_{13} \\ u_{21}+u_{22} & -u_{21}+u_{23} & u_{21}+u_{22}+2u_{23} \\ u_{31}+u_{32} & -u_{31}+u_{33} & u_{31}+u_{32}+2u_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

одакле следе три система једначина, први за матричне елементе прве врсте

$$\begin{cases} u_{11}+u_{12}=1 \\ -u_{11}+u_{13}=0 \\ u_{11}+u_{12}+2u_{13}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_{12}=1-u_{11} \\ u_{11}=u_{13} \\ u_{11}+u_{12}+2u_{13}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{12}=1-u_{13} \\ u_{11}=u_{13} \\ u_{11}+u_{12}+2u_{13}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{12}=1-u_{13} \\ u_{11}=u_{13} \\ u_{13}+1-u_{13}+2u_{13}=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_{12}=1-u_{13} \\ u_{11}=u_{13} \\ 1+2u_{13}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_{12}=1-u_{13} \\ u_{11}=u_{13} \\ 2u_{13}=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_{12}=1-u_{13} \\ u_{11}=u_{13} \\ u_{13}=-1/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{12}=1+1/2 \\ u_{11}=-1/2 \\ u_{13}=-1/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_{12}=3/2 \\ u_{11}=-1/2 \\ u_{13}=-1/2 \end{cases}$$

други за матричне елементе друге врсте

$$\begin{cases} u_{21}+u_{22}=0 \\ -u_{21}+u_{23}=1 \\ u_{21}+u_{22}+2u_{23}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_{21}=-u_{22} \\ u_{23}=1+u_{21} \\ u_{21}+u_{22}+2u_{23}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{21}=-u_{22} \\ u_{23}=1-u_{22} \\ u_{21}+u_{22}+2u_{23}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{21}=-u_{22} \\ u_{23}=1-u_{22} \\ -u_{22}+u_{22}+2-2u_{22}=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_{21}=-u_{22} \\ u_{23}=1-u_{22} \\ 2(1-u_{22})=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_{21}=-u_{22} \\ u_{23}=1-u_{22} \\ 1-u_{22}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_{21}=-1 \\ u_{23}=0 \\ u_{22}=1 \end{cases}$$

и трећи за матричне елементе треће врсте

$$\begin{cases} u_{31}+u_{32}=0 \\ -u_{31}+u_{33}=0 \\ u_{31}+u_{32}+2u_{33}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_{32}=-u_{31} \\ u_{31}=u_{33} \\ u_{31}+u_{32}+2u_{33}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{32}=-u_{33} \\ u_{31}=u_{33} \\ u_{31}+u_{32}+2u_{33}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{32}=-u_{33} \\ u_{31}=u_{33} \\ u_{33}-u_{33}+2u_{33}=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_{32}=-u_{33} \\ u_{31}=u_{33} \\ 2u_{33}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_{32}=-u_{33} \\ u_{31}=u_{33} \\ u_{33}=1/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_{32}=-1/2 \\ u_{31}=1/2 \\ u_{33}=1/2 \end{cases}$$

те је инверзна матрица једнака

$$\mathscr{U}^{-1}=\begin{bmatrix}-1/2 & 3/2 & -1/2\\ -1 & 1 & 0\\ 1/2 & -1/2 & 1/2\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1 & 3 & -1\\ -2 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}.$$

Сада се може проверити да ли заиста трансформација сличности

$$\mathscr{A}_{\text{dij}}=\mathscr{U}^{-1}.\mathscr{A}\,\mathscr{U}$$

даје дијагонални облик матрице $\mathscr{A}$

$$\mathscr{A}_{\text{dij}}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1 & 3 & -1\\ -2 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -3 & 3\\ 3 & -5 & 3\\ 6 & -6 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1 & 3 & -1\\ -2 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1-3+0 & -1+0+3 & 1-3+6\\ 3-5+0 & -3+0+3 & 3-5+6\\ 6-6+0 & -6+0+4 & 6-6+8\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1 & 3 & -1\\ -2 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 2 & 4\\ -2 & 0 & 4\\ 0 & -2 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 3 & -1\\ -2 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-2 & 2 & 4\\ -2 & 0 & 4\\ 0 & -2 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 3 & -1\\ -2 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1-3+0 & -1+0+1 & -2+6-4\\ 2-2+0 & -2+0+0 & -4+4+0\\ -1+1+0 & 1+0-1 & 2-2+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

што јесте једнако дијагоналном облику матрице $\mathscr{A}$ пошто се он добија уписивањем својствених вредности матрице на главну дијагоналу квадратне матрице

$$\mathscr{A}_{\text{dij}}=\begin{bmatrix}\lambda_{a\,(1)} & 0 & 0\\ 0 & \lambda_{a\,(2)} & 0\\ 0 & 0 & \lambda_{a\,(3)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}.$$

Значи да иако матрице $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ имају исту карактеристичну једначину (полином), оне нису *сличне* матрице.

Матрица $\mathscr{A}$ *није симетрична* (њени вандијагонални елементи $a_{12}=a_{21}$, $a_{13}=a_{31}$ и $a_{23}=a_{32}$ међусобно су различити) те се не може дијагонализовати у ортонормираном базису будући да њен дијагонални облик $\mathscr{A}_{\text{dij}}$ мора по дефиницији бити симетричан (пошто су сви вандијагонални елементи једнаки нули).

(10.8) За сваку од следеће три матрице

(а) $\mathscr{A}=\begin{bmatrix}11 & 2 & -8\\ 2 & 2 & 10\\ -8 & 10 & 5\end{bmatrix}$,

(б) $\mathscr{B}=\begin{bmatrix}17 & -8 & 4\\ -8 & 17 & -4\\ 4 & -4 & 11\end{bmatrix}$,

(в) $\mathscr{C}=\begin{bmatrix}3 & -i & 0\\ i & 3 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$

одредити *својствени* ортонормирани базис као и *дијагоналну форму* у том базису.

(а) Својствени проблем оператора који одговара првој матрици

$$\hat{A}|v\rangle=\lambda|v\rangle$$

написан у матричном облику гласи

$$\mathscr{A}\,\xi=\lambda\,\xi$$

односно

$$\begin{bmatrix}11 & 2 & -8\\ 2 & 2 & 10\\ -8 & 10 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{bmatrix}$$

илити

$$\begin{bmatrix}11-\lambda & 2 & -8\\ 2 & 2-\lambda & 10\\ -8 & 10 & 5-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}.$$

Да решење својственог проблема не би било тривијално, матрица ξ мора имати барем једну компоненту различиту од нуле, а то значи да детерминанта задате матрице мора бити једнака нули

$$\begin{vmatrix}11-\lambda & 2 & -8\\ 2 & 2-\lambda & 10\\ -8 & 10 & 5-\lambda\end{vmatrix}=0\,.$$

Решавањем овог израза

$$(-1)^{1+1}(11-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda & 10\\ 10 & 5-\lambda\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}2\begin{vmatrix}2 & 10\\ -8 & 5-\lambda\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}(-8)\begin{vmatrix}2 & 2-\lambda\\ -8 & 10\end{vmatrix}=0$$

односно

$$
\begin{aligned}
&(11-\lambda)\big[(2-\lambda)(5-\lambda)-100\big]-2\big[2(5-\lambda)+80\big]-8\big[20+8(2-\lambda)\big]=0\\
&\Leftrightarrow\ (11-\lambda)(10-5\lambda-2\lambda+\lambda^2-100)-2(10-2\lambda+80)-8(20+16-8\lambda)=0\\
&\Leftrightarrow\ (11-\lambda)(\lambda^2-7\lambda-90)-2(90-2\lambda)-8(36-8\lambda)=0\\
&\Leftrightarrow\ 11\lambda^2-\lambda^3-77\lambda+7\lambda^2-990+90\lambda-180+4\lambda-288+64\lambda=0\\
&\Leftrightarrow\ -\lambda^3+18\lambda^2+81\lambda-1458=0\ \Leftrightarrow\ -\lambda^3+18\lambda^2+81\lambda-18\cdot 81=0\\
&\Leftrightarrow\ -\lambda^2(\lambda-18)+81(\lambda-18)=0\ \Leftrightarrow\ (-\lambda^2+81)(\lambda-18)=0\\
&\Leftrightarrow\ (9^2-\lambda^2)(\lambda-18)=0\ \Leftrightarrow\ (9-\lambda)(9+\lambda)(\lambda-18)=0
\end{aligned}
$$

добијају се три различите својствене вредности матрице $\mathscr{A}$

$$\lambda_1=-9,\ \lambda_2=9 \text{ и } \lambda_3=18$$

којима одговарају три својствене једначине

$$
\left\{
\begin{aligned}
\hat{A}|v_1\rangle &= \lambda_1|v_1\rangle=-9|v_1\rangle\\
\hat{A}|v_2\rangle &= \lambda_2|v_2\rangle=9|v_2\rangle\\
\hat{A}|v_3\rangle &= \lambda_3|v_3\rangle=18|v_3\rangle
\end{aligned}
\right.
$$

које, написане у облику који одговара основној формули репрезентовања

$$
\left\{
\begin{aligned}
\hat{A}|v_1\rangle &= -9|v_1\rangle+0|v_2\rangle+0|v_3\rangle\\
\hat{A}|v_2\rangle &= 0|v_1\rangle+9|v_2\rangle+0|v_3\rangle\\
\hat{A}|v_3\rangle &= 0|v_1\rangle+0|v_2\rangle+18|v_3\rangle
\end{aligned}
\right.
$$

дају *дијагоналну форму* матрице, која уствари представља матрицу којом се оператор $\hat{A}$ представља у свом својственом базису

$$\mathscr{A}_{\text{dij}}=\big[\hat{A}\big]_{\{|v_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}-9&0&0\\0&9&0\\0&0&18\end{bmatrix}.$$

Сад, матрични израз

$$\begin{bmatrix}11-\lambda&2&-8\\2&2-\lambda&10\\-8&10&5-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\xi_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

уствари представља скраћено записан систем једначина

$$
\left\{
\begin{aligned}
&(11-\lambda)\xi_1+2\xi_2-8\xi_3=0\\
&2\xi_1+(2-\lambda)\xi_2+10\xi_3=0\\
&-8\xi_1+10\xi_2+(5-\lambda)\xi_3=0
\end{aligned}
\right.
$$

Заменом прве својствене вредности $\lambda_1 = -9$ у горњи систем следи

$$\begin{cases}(11-\lambda_1)\xi_1 + 2\xi_2 - 8\xi_3 = 0\\ 2\xi_1 + (2-\lambda_1)\xi_2 + 10\xi_3 = 0\\ -8\xi_1 + 10\xi_2 + (5-\lambda_1)\xi_3 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(11+9)\xi_1 + 2\xi_2 - 8\xi_3 = 0\\ 2\xi_1 + (2+9)\xi_2 + 10\xi_3 = 0\\ -8\xi_1 + 10\xi_2 + (5+9)\xi_3 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}20\xi_1 + 2\xi_2 - 8\xi_3 = 0\\ 2\xi_1 + 11\xi_2 + 10\xi_3 = 0\\ -8\xi_1 + 10\xi_2 + 14\xi_3 = 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}10\xi_1 + \xi_2 - 4\xi_3 = 0\\ 2\xi_1 + 11\xi_2 + 10\xi_3 = 0\\ -4\xi_1 + 5\xi_2 + 7\xi_3 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\xi_2 = -10\xi_1 + 4\xi_3\\ 2\xi_1 + 11\xi_2 + 10\xi_3 = 0\\ -4\xi_1 + 5\xi_2 + 7\xi_3 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\xi_2 = -10\xi_1 + 4\xi_3\\ 2\xi_1 + 11\xi_2 + 10\xi_3 = 0\\ -4\xi_1 - 50\xi_1 + 20\xi_3 + 7\xi_3 = 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\xi_2 = -10\xi_1 + 4\xi_3\\ 2\xi_1 + 11\xi_2 + 10\xi_3 = 0\\ 27\xi_3 = 54\xi_1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\xi_2 = -10\xi_1 + 4\xi_3\\ 2\xi_1 + 11\xi_2 + 10\xi_3 = 0\\ \xi_3 = 2\xi_1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\xi_2 = -10\xi_1 + 8\xi_1\\ 2\xi_1 + 11\xi_2 + 10\xi_3 = 0\\ \xi_3 = 2\xi_1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\xi_2 = -2\xi_1\\ 2\xi_1 + 11\xi_2 + 10\xi_3 = 0\\ \xi_3 = 2\xi_1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\xi_2 = -2\xi_1\\ 2\xi_1 - 22\xi_1 + 20\xi_1 = 0\\ \xi_3 = 2\xi_1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\xi_2 = -2\xi_1\\ (22-22)\xi_1 = 0\\ \xi_3 = 2\xi_1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\xi_2 = -2\xi_1\\ \xi_1 \in \mathbb{R}\\ \xi_3 = 2\xi_1\end{cases}$$

Како добијене компоненте првог својственог вектора не смеју све бити једнаке нули (нулти вектор био би тривијално решење својственог проблема), то се бира да је $\xi_1 = 1$, чиме се добија да је $\xi_2 = -2$ и $\xi_3 = 2$, те се први својствени вектор, који одговара првој својственој вредности $\lambda_1 = -9$, може записати као матрица-колона

$$\big[|v_1\rangle\big]_{\{|v_i\rangle\}} = \begin{bmatrix}1\\-2\\2\end{bmatrix}$$

или као уређена тројка

$$|v_1\rangle = (1,-2,2)\,.$$

Након замене друге својствене вредности $\lambda_2 = 9$ у систем једначина следи

$$\begin{cases}(11-\lambda_2)\xi_1 + 2\xi_2 - 8\xi_3 = 0\\ 2\xi_1 + (2-\lambda_2)\xi_2 + 10\xi_3 = 0\\ -8\xi_1 + 10\xi_2 + (5-\lambda_2)\xi_3 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(11-9)\xi_1 + 2\xi_2 - 8\xi_3 = 0\\ 2\xi_1 + (2-9)\xi_2 + 10\xi_3 = 0\\ -8\xi_1 + 10\xi_2 + (5-9)\xi_3 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2\xi_1 + 2\xi_2 - 8\xi_3 = 0\\ 2\xi_1 - 7\xi_2 + 10\xi_3 = 0\\ -8\xi_1 + 10\xi_2 - 4\xi_3 = 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\xi_1 + \xi_2 - 4\xi_3 = 0\\ 2\xi_1 - 7\xi_2 + 10\xi_3 = 0\\ 4\xi_1 - 5\xi_2 + 2\xi_3 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\xi_1 = -\xi_2 + 4\xi_3\\ 2\xi_1 - 7\xi_2 + 10\xi_3 = 0\\ 4\xi_1 - 5\xi_2 + 2\xi_3 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\xi_1 = -\xi_2 + 4\xi_3\\ -2\xi_2 + 8\xi_3 - 7\xi_2 + 10\xi_3 = 0\\ 4\xi_1 - 5\xi_2 + 2\xi_3 = 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\xi_1 = -\xi_2 + 4\xi_3\\ -9\xi_2 + 18\xi_3 = 0\\ 4\xi_1 - 5\xi_2 + 2\xi_3 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\xi_1 = -\xi_2 + 4\xi_3\\ \xi_2 = 2\xi_3\\ 4\xi_1 - 5\xi_2 + 2\xi_3 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\xi_1 = -2\xi_3 + 4\xi_3\\ \xi_2 = 2\xi_3\\ 4\xi_1 - 5\xi_2 + 2\xi_3 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\xi_1 = 2\xi_3\\ \xi_2 = 2\xi_3\\ 4\xi_1 - 5\xi_2 + 2\xi_3 = 0\end{cases}$$

то јест

$$\begin{cases} \xi_1 = 2\xi_3 \\ \xi_2 = 2\xi_3 \\ 8\xi_3 - 10\xi_3 + 2\xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = 2\xi_3 \\ \xi_2 = 2\xi_3 \\ (10-10)\xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = 2\xi_3 \\ \xi_2 = 2\xi_3 \\ 0 \cdot \xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = 2\xi_1 \\ \xi_2 = 2\xi_3 \\ \xi_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Опет, добијене компоненте другог својственог вектора морају бити различите од нуле (нулти вектор - тривијално решење својственог проблема), те се бира да је $\xi_3 = 1$, одакле следи да су онда $\xi_1 = 2$ и $\xi_2 = 2$. То значи да се други својствени вектор, који одговара другој својственој вредности $\lambda_2 = 9$, може представити било као матрица-колона

$$\left[|v_2\rangle\right]_{\{|v_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

било као уређена тројка

$$|v_2\rangle = (2, 2, 1).$$

Након замене треће својствене вредности $\lambda_3 = 18$ у систем једначина следи

$$\begin{cases} (11-\lambda_3)\xi_1 + 2\xi_2 - 8\xi_3 = 0 \\ 2\xi_1 + (2-\lambda_3)\xi_2 + 10\xi_3 = 0 \\ -8\xi_1 + 10\xi_2 + (5-\lambda_3)\xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (11-18)\xi_1 + 2\xi_2 - 8\xi_3 = 0 \\ 2\xi_1 + (2-18)\xi_2 + 10\xi_3 = 0 \\ -8\xi_1 + 10\xi_2 + (5-18)\xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7\xi_1 + 2\xi_2 - 8\xi_3 = 0 \\ 2\xi_1 - 16\xi_2 + 10\xi_3 = 0 \\ -8\xi_1 + 10\xi_2 - 13\xi_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -7\xi_1 + 2\xi_2 - 8\xi_3 = 0 \\ \xi_1 - 8\xi_2 + 5\xi_3 = 0 \\ 8\xi_1 - 10\xi_2 + 13\xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7\xi_1 + 2\xi_2 - 8\xi_3 = 0 \\ \xi_1 = 8\xi_2 - 5\xi_3 \\ 8\xi_1 - 10\xi_2 + 13\xi_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -56\xi_2 + 35\xi_3 + 2\xi_2 - 8\xi_3 = 0 \\ \xi_1 = 8\xi_2 - 5\xi_3 \\ 8\xi_1 - 10\xi_2 + 13\xi_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -54\xi_2 + 27\xi_3 = 0 \\ \xi_1 = 8\xi_2 - 5\xi_3 \\ 8\xi_1 - 10\xi_2 + 13\xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_3 = 2\xi_2 \\ \xi_1 = 8\xi_2 - 5\xi_3 \\ 8\xi_1 - 10\xi_2 + 13\xi_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi_3 = 2\xi_2 \\ \xi_1 = 8\xi_2 - 10\xi_2 \\ 8\xi_1 - 10\xi_2 + 13\xi_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \xi_3 = 2\xi_2 \\ \xi_1 = -2\xi_2 \\ 8\xi_1 - 10\xi_2 + 13\xi_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi_3 = 2\xi_2 \\ \xi_1 = -2\xi_2 \\ (26-16-10)\xi_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_3 = 2\xi_2 \\ \xi_1 = -2\xi_2 \\ 0 \cdot \xi_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = -2\xi_2 \\ \xi_2 \in \mathbb{R} \\ \xi_3 = 2\xi_2 \end{cases}$$

Наравно, добијене компоненте трећег својственог вектора поново морају бити различите од нуле (нулти вектор је тривијално решење својственог проблема). Узима се да је $\xi_2 = 1$, те су онда $\xi_1 = -2$ и $\xi_3 = 2$. То значи да се трећи својствени вектор, који одговара трећој својственој вредности $\lambda_3 = 18$, може представити било као матрица-колона

$$\left[|v_3\rangle\right]_{\{|v_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

било као уређена тројка

$$|v_3\rangle = (-2,1,2).$$

Да би се добио ортонормирани својствени базис, требало би Грам-Шмитовим поступком ортонормирати добијени систем својствених вектора

$$\{|v_1\rangle = (1,-2,2), |v_2\rangle = (2,2,1), |v_3\rangle = (-2,1,2)\}.$$

Ипак, будући да су добијени својствени вектори већ *ортогонални* међусобно

$$\langle v_1|v_2\rangle = \langle (1,-2,2)|(2,2,1)\rangle = 2-4+2 = 4-4 = 0$$
$$\langle v_1|v_3\rangle = \langle (1,-2,2)|(-2,1,2)\rangle = -2-2+4 = -4+4 = 0$$
$$\langle v_2|v_3\rangle = \langle (2,2,1)|(-2,1,2)\rangle = -4+2+2 = -4+4 = 0$$

довољно их је *нормирати*, односно поделити сваки од њих са својом нормом

$$|\mathrm{e}_1\rangle = \frac{|v_1\rangle}{\||v_1\rangle\|} = \frac{|v_1\rangle}{\sqrt{\langle v_1|v_1\rangle}} = \frac{(1,-2,2)}{\sqrt{\langle (1,-2,2)|(1,-2,2)\rangle}} = \frac{(1,-2,2)}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{(1,-2,2)}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}(1,-2,2)$$
$$|\mathrm{e}_2\rangle = \frac{|v_2\rangle}{\||v_2\rangle\|} = \frac{|v_2\rangle}{\sqrt{\langle v_2|v_2\rangle}} = \frac{(2,2,1)}{\sqrt{\langle (2,2,1)|(2,2,1)\rangle}} = \frac{(2,2,1)}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{(2,2,1)}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}(2,2,1)$$
$$|\mathrm{e}_3\rangle = \frac{|v_3\rangle}{\||v_3\rangle\|} = \frac{|v_3\rangle}{\sqrt{\langle v_3|v_3\rangle}} = \frac{(-2,1,2)}{\sqrt{\langle (-2,1,2)|(-2,1,2)\rangle}} = \frac{(-2,1,2)}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{(-2,1,2)}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}(-2,1,2)$$

чиме се добија тражени ортонормирани својствени базис

$$\left\{|\mathrm{e}_1\rangle = \frac{1}{3}(1,-2,2), |\mathrm{e}_2\rangle = \frac{1}{3}(2,2,1), |\mathrm{e}_3\rangle = \frac{1}{3}(-2,1,2)\right\}.$$

(б) Својствени проблем оператора који одговара другој матрици

$$\hat{B}|v\rangle = \lambda|v\rangle$$

може се записати у матричном облику као

$$\mathscr{B}\,\xi = \lambda\,\xi$$

односно

$$\begin{bmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}$$

илити

$$\begin{bmatrix} 17-\lambda & -8 & 4 \\ -8 & 17-\lambda & -4 \\ 4 & -4 & 11-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Да решење својственог проблема не би било тривијално, матрица ξ мора имати барем једну компоненту различиту од нуле, те детерминанта задате матрице мора бити једнака нули

$$\begin{vmatrix} 17-\lambda & -8 & 4 \\ -8 & 17-\lambda & -4 \\ 4 & -4 & 11-\lambda \end{vmatrix} = 0 .$$

Након развијања детерминанте

$$(-1)^{1+1}(17-\lambda)\begin{vmatrix} 17-\lambda & -4 \\ -4 & 11-\lambda \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}(-8)\begin{vmatrix} -8 & -4 \\ 4 & 11-\lambda \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}4\begin{vmatrix} -8 & 17-\lambda \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow\ (17-\lambda)\left[(17-\lambda)(11-\lambda)-4\cdot 4\right]+8\left[-8(11-\lambda)+4\cdot 4\right]+4\left[8\cdot 4-4(17-\lambda)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\ (17-\lambda)(187-11\lambda-17\lambda+\lambda^2-16)+8(-88+8\lambda+16)+4(32-68+4\lambda)=0$$

$$\Leftrightarrow\ (17-\lambda)(\lambda^2-28\lambda+171)+8(8\lambda-72)+4(4\lambda-36)=0$$

$$\Leftrightarrow\ 17\lambda^2-\lambda^3-476\lambda+28\lambda^2+2907-171\lambda+64\lambda-576+16\lambda-144=0$$

$$\Leftrightarrow\ -\lambda^3+45\lambda^2-567\lambda+2187=0\ \Leftrightarrow\ \lambda^3-45\lambda^2+567\lambda-2187=0$$

$$\Leftrightarrow\ \lambda^3-18\lambda^2-27\lambda^2+81\lambda+27\cdot 18\lambda-27\cdot 81=0$$

$$\Leftrightarrow\ \lambda^3-18\lambda^2+81\lambda-27\lambda^2+27\cdot 18\lambda-27\cdot 81=0$$

$$\Leftrightarrow\ \lambda(\lambda^2-18\lambda+81)-27(\lambda^2-18\lambda+81)=0$$

$$\Leftrightarrow\ (\lambda-27)(\lambda^2-18\lambda+81)=0$$

$$\Leftrightarrow\ (\lambda-27)(\lambda-9)^2=0$$

$$\Leftrightarrow\ (\lambda-9)(\lambda-9)(\lambda-27)=0$$

добијају се следеће својствене вредности матрице $\mathscr{B}$

$$\lambda_1=9,\ \lambda_2=9\ \text{и}\ \lambda_3=27$$

којима, без обзира на то што су две од својствених вредности једнаке, одговарају следеће три својствене једначине

$$\underline{\begin{cases} \hat{B}|v_1\rangle = \lambda_1|v_1\rangle = 9|v_1\rangle \\ \hat{B}|v_2\rangle = \lambda_2|v_2\rangle = 9|v_2\rangle \\ \hat{B}|v_3\rangle = \lambda_3|v_3\rangle = 27|v_3\rangle \end{cases}}$$

које, написане у облику који одговара основној формули репрезентовања

$$\underline{\begin{cases} \hat{B}|v_1\rangle = 9|v_1\rangle + 0|v_2\rangle + 0|v_3\rangle \\ \hat{B}|v_2\rangle = 0|v_1\rangle + 9|v_2\rangle + 0|v_3\rangle \\ \hat{B}|v_3\rangle = 0|v_1\rangle + 0|v_2\rangle + 27|v_3\rangle \end{cases}}$$

дају *дијагоналну форму* матрице, која уствари представља матрицу којом се оператор $\hat{B}$ представља у свом својственом базису

$$\mathscr{B}_{\text{dij}} = \left[\hat{B}\right]_{\{|v_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{bmatrix}.$$

Сад, матрични израз

$$\begin{bmatrix} 17-\lambda & -8 & 4 \\ -8 & 17-\lambda & -4 \\ 4 & -4 & 11-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

уствари представља скраћено записан систем једначина

$$\begin{cases} (17-\lambda)\xi_1-8\xi_2+4\xi_3=0 \\ -8\xi_1+(17-\lambda)\xi_2-4\xi_3=0 \\ 4\xi_1-4\xi_2+(11-\lambda)\xi_3=0 \end{cases}$$

Заменом својствене вредности $\lambda_{1,2}=9$ у горњи систем биће

$$\begin{cases} (17-\lambda_{1,2})\xi_1-8\xi_2+4\xi_3=0 \\ -8\xi_1+(17-\lambda_{1,2})\xi_2-4\xi_3=0 \\ 4\xi_1-4\xi_2+(11-\lambda_{1,2})\xi_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (17-9)\xi_1-8\xi_2+4\xi_3=0 \\ -8\xi_1+(17-9)\xi_2-4\xi_3=0 \\ 4\xi_1-4\xi_2+(11-9)\xi_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8\xi_1-8\xi_2+4\xi_3=0 \\ -8\xi_1+8\xi_2-4\xi_3=0 \\ 4\xi_1-4\xi_2+2\xi_3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\xi_1-2\xi_2+\xi_3=0 \\ -2\xi_1+2\xi_2-\xi_3=0 \\ 2\xi_1-2\xi_2+\xi_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi_3=2\xi_2-2\xi_1 \\ -2\xi_1+2\xi_2-2\xi_2+2\xi_1=0 \\ 2\xi_1-2\xi_2+2\xi_2-2\xi_1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_3=2\xi_2-2\xi_1 \\ 0\cdot\xi_1=0 \\ 0\cdot\xi_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_3=2(\xi_2-\xi_1) \\ \xi_1\in\mathbb{R} \\ \xi_2\in\mathbb{R} \end{cases}$$

Услед дегенерације својствене вредности $\lambda_{1,2}=9$ њој морају одговарати два својствена вектора - како су ξ_1 и ξ_2 произвољни реални бројеви, прво се бира да је $\xi_1=1$ и $\xi_2=1$, те је онда $\xi_3=0$; први својствени вектор може се записати као матрица-колона

$$\left[|v_1\rangle\right]_{\{|v_i\rangle\}}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

или као уређена тројка

$$|v_1\rangle=(1,1,0)\,.$$

Потом се узима да је $\xi_1=0$ и $\xi_2=1$, те је онда $\xi_3=2$; други својствени вектор дат је као матрица-колона

$$\left[|v_2\rangle\right]_{\{|v_i\rangle\}}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

или као уређена тројка

$$|v_2\rangle=(0,1,2)\,.$$

Оба добијена својствена вектора одговарају дегенерисаној својственој вредности $\lambda_{1,2}=9$.

Након замене треће својствене вредности $\lambda_3 = 27$ у систем једначина следи

$$\begin{cases}(17-\lambda_3)\xi_1 - 8\xi_2 + 4\xi_3 = 0\\ -8\xi_1 + (17-\lambda_3)\xi_2 - 4\xi_3 = 0\\ 4\xi_1 - 4\xi_2 + (11-\lambda_3)\xi_3 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(17-27)\xi_1 - 8\xi_2 + 4\xi_3 = 0\\ -8\xi_1 + (17-27)\xi_2 - 4\xi_3 = 0\\ 4\xi_1 - 4\xi_2 + (11-27)\xi_3 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-10\xi_1 - 8\xi_2 + 4\xi_3 = 0\\ -8\xi_1 - 10\xi_2 - 4\xi_3 = 0\\ 4\xi_1 - 4\xi_2 - 16\xi_3 = 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}5\xi_1 + 4\xi_2 - 2\xi_3 = 0\\ 4\xi_1 + 5\xi_2 + 2\xi_3 = 0\\ \xi_1 - \xi_2 - 4\xi_3 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}5\xi_1 + 4\xi_2 - 2\xi_3 = 0\\ 9\xi_1 + 9\xi_2 = 0\\ \xi_1 - \xi_2 = 4\xi_3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5\xi_1 + 4\xi_2 - 2\xi_3 = 0\\ \xi_1 + \xi_2 = 0\\ \xi_1 - \xi_2 = 4\xi_3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5\xi_1 + 4\xi_2 - 2\xi_3 = 0\\ \xi_2 = -\xi_1\\ \xi_1 - \xi_2 = 4\xi_3\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}5\xi_1 + 4\xi_2 - 2\xi_3 = 0\\ \xi_2 = -\xi_1\\ \xi_1 + \xi_1 = 4\xi_3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5\xi_1 + 4\xi_2 - 2\xi_3 = 0\\ \xi_2 = -\xi_1\\ 2\xi_1 = 4\xi_3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5\xi_1 + 4\xi_2 - 2\xi_3 = 0\\ \xi_2 = -\xi_1 = -2\xi_3\\ \xi_1 = 2\xi_3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}10\xi_3 - 8\xi_3 - 2\xi_3 = 0\\ \xi_2 = -2\xi_3\\ \xi_1 = 2\xi_3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(10-10)\xi_3 = 0\\ \xi_2 = -2\xi_3\\ \xi_1 = 2\xi_3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0\cdot\xi_3 = 0\\ \xi_2 = -2\xi_3\\ \xi_1 = 2\xi_3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\xi_3 \in \mathbb{R}\\ \xi_2 = -2\xi_3\\ \xi_1 = 2\xi_3\end{cases}$$

Како добијене компоненте трећег својственог вектора морају бити различите од нуле (нулти вектор представљао би тривијално решење својственог проблема) узима се да је $\xi_3 = 1$, те су онда $\xi_1 = 2$ и $\xi_2 = -2$. То значи да се трећи својствени вектор, који одговара трећој својственој вредности $\lambda_3 = 27$, може представити било као матрица-колона

$$\left[|v_3\rangle\right]_{\{|v_i\rangle\}} = \begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix}$$

било као уређена тројка

$$|v_3\rangle = (2,-2,1).$$

Да би се добио ортонормирани својствени базис, треба Грам-Шмитовим поступком ортонормирати добијени систем својствених вектора

$$\left\{|v_1\rangle = (1,1,0), |v_2\rangle = (0,1,2), |v_3\rangle = (2,-2,1)\right\}.$$

Поступак отпочиње дељењем првог вектора његовом нормом

$$|\mathrm{e}_1\rangle = \frac{|v_1\rangle}{\left\||v_1\rangle\right\|} = \frac{|v_1\rangle}{\sqrt{\langle v_1|v_1\rangle}} = \frac{(1,1,0)}{\sqrt{\langle(1,1,0)|(1,1,0)\rangle}} = \frac{(1,1,0)}{\sqrt{1\cdot1+1\cdot1+0\cdot0}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0).$$

Потом се ортонормира други својствени вектор, на следећи начин

$$|\mathrm{e}_2\rangle = \frac{|v_2\rangle - \langle \mathrm{e}_1|v_2\rangle|\mathrm{e}_1\rangle}{\left\||v_2\rangle - \langle \mathrm{e}_1|v_2\rangle|\mathrm{e}_1\rangle\right\|} = \frac{(0,1,2) - \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)\middle|(0,1,2)\right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)}{\left\|(0,1,2) - \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)\middle|(0,1,2)\right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)\right\|}$$

односно

$$|\mathrm{e}_2\rangle=\frac{(0,1,2)-\frac{1}{2}\langle(1,1,0)|(0,1,2)\rangle(1,1,0)}{\left\|(0,1,2)-\frac{1}{2}\langle(1,1,0)|(0,1,2)\rangle(1,1,0)\right\|}=\frac{(0,1,2)-\frac{1}{2}[1\cdot 0+1\cdot 1+0\cdot 2](1,1,0)}{\left\|(0,1,2)-\frac{1}{2}[1\cdot 0+1\cdot 1+0\cdot 2](1,1,0)\right\|}$$

$$=\frac{(0,1,2)-\frac{1}{2}(1,1,0)}{\left\|(0,1,2)-\frac{1}{2}(1,1,0)\right\|}=\frac{(0,1,2)+\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)}{\left\|(0,1,2)+\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)\right\|}=\frac{\left(0-\frac{1}{2},1-\frac{1}{2},2-0\right)}{\left\|\left(0-\frac{1}{2},1-\frac{1}{2},2-0\right)\right\|}=\frac{\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{4}{2}\right)}{\left\|\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{4}{2}\right)\right\|}$$

$$=\frac{\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{4}{2}\right)}{\sqrt{\left\langle\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{4}{2}\right)\middle|\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{4}{2}\right)\right\rangle}}=\frac{\frac{1}{2}(-1,1,4)}{\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\frac{1}{2}+\frac{4}{2}\frac{4}{2}}}=\frac{\frac{1}{2}(-1,1,4)}{\frac{1}{2}\sqrt{1+1+16}}=\frac{1}{3\sqrt{2}}(-1,1,4)$$

На крају се ортонормира трећи својствени вектор, као

$$|\mathrm{e}_3\rangle=\frac{|v_3\rangle-\langle\mathrm{e}_1|v_3\rangle|\mathrm{e}_1\rangle-\langle\mathrm{e}_2|v_3\rangle|\mathrm{e}_2\rangle}{\left\||v_3\rangle-\langle\mathrm{e}_1|v_3\rangle|\mathrm{e}_1\rangle-\langle\mathrm{e}_2|v_3\rangle|\mathrm{e}_2\rangle\right\|}$$

$$=\frac{(2,-2,1)-\left\langle\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)\middle|(2,-2,1)\right\rangle\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)-\left\langle\frac{1}{3\sqrt{2}}(-1,1,4)\middle|(2,-2,1)\right\rangle\frac{1}{3\sqrt{2}}(-1,1,4)}{\left\|(2,-2,1)-\left\langle\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)\middle|(2,-2,1)\right\rangle\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)-\left\langle\frac{1}{3\sqrt{2}}(-1,1,4)\middle|(2,-2,1)\right\rangle\frac{1}{3\sqrt{2}}(-1,1,4)\right\|}$$

$$=\frac{(2,-2,1)-\frac{1}{2}\langle(1,1,0)|(2,-2,1)\rangle(1,1,0)-\frac{1}{18}\langle(-1,1,4)|(2,-2,1)\rangle(-1,1,4)}{\left\|(2,-2,1)-\frac{1}{2}\langle(1,1,0)|(2,-2,1)\rangle(1,1,0)-\frac{1}{18}\langle(-1,1,4)|(2,-2,1)\rangle(-1,1,4)\right\|}$$

$$=\frac{(2,-2,1)-\frac{1}{2}\big[1\cdot 2+1\cdot(-2)+0\cdot 1\big](1,1,0)-\frac{1}{18}\big[(-1)\cdot 2+1\cdot(-2)+4\cdot 1\big](-1,1,4)}{\left\|(2,-2,1)-\frac{1}{2}\big[1\cdot 2+1\cdot(-2)+0\cdot 1\big](1,1,0)-\frac{1}{18}\big[(-1)\cdot 2+1\cdot(-2)+4\cdot 1\big](-1,1,4)\right\|}$$

$$=\frac{(2,-2,1)-\frac{1}{2}(2-2)(1,1,0)-\frac{1}{18}(-2-2+4)(-1,1,4)}{\left\|(2,-2,1)-\frac{1}{2}(2-2)(1,1,0)-\frac{1}{18}(-2-2+4)(-1,1,4)\right\|}$$

$$=\frac{(2,-2,1)-\frac{0}{2}(1,1,0)-\frac{0}{18}(-1,1,4)}{\left\|(2,-2,1)-\frac{0}{2}(1,1,0)-\frac{0}{18}(-1,1,4)\right\|}=\frac{(2,-2,1)}{\|(2,-2,1)\|}=\frac{(2,-2,1)}{\sqrt{\langle(2,-2,1)|(2,-2,1)\rangle}}$$

$$=\frac{(2,-2,1)}{\sqrt{2\cdot 2+(-2)\cdot(-2)+1\cdot 1}}=\frac{1}{\sqrt{4+4+1}}(2,-2,1)=\frac{1}{3}(2,-2,1)$$

чиме је добијен тражени ортонормирани својствени базис

$$\left\{|\mathrm{e}_1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0),|\mathrm{e}_2\rangle=\frac{1}{3\sqrt{2}}(-1,1,4),|\mathrm{e}_3\rangle=\frac{1}{3}(2,-2,1)\right\}.$$

(в) Својствени проблем оператора који одговара трећој задатој матрици

$$\hat{C}|v\rangle = \lambda|v\rangle$$

може се записати у матричном облику као

$$\mathscr{C}\xi = \lambda\xi$$

односно

$$\begin{bmatrix} 3 & -i & 0 \\ i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}$$

илити

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda & -i & 0 \\ i & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Да решење својственог проблема не би било тривијално, матрица ξ мора имати барем једну компоненту различиту од нуле, те детерминанта задате матрице мора бити једнака нули

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -i & 0 \\ i & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0\,.$$

Након развијања детерминанте

$$(-1)^{1+1}(3-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}(-i)\begin{vmatrix} i & 0 \\ 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}0\begin{vmatrix} i & 3-\lambda \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow\ (3-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda) + i^2(4-\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow\ \left[(3-\lambda)(3-\lambda) + i^2\right](4-\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow\ \left[(3-\lambda)(3-\lambda) - 1\right](4-\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow\ \left[(3-\lambda)^2 - 1^2\right](4-\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow\ (3-\lambda-1)(3-\lambda+1)(4-\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow\ (2-\lambda)(4-\lambda)(4-\lambda) = 0$$

добијају се следеће својствене вредности матрице $\mathscr{C}$

$$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 4 \text{ и } \lambda_3 = 4$$

којима, без обзира на то што су две од својствених вредности једнаке, одговарају следеће три својствене једначине

$$\underline{\begin{cases} \hat{C}|v_1\rangle = \lambda_1|v_1\rangle = 2|v_1\rangle \\ \hat{C}|v_2\rangle = \lambda_2|v_2\rangle = 4|v_2\rangle \\ \hat{C}|v_3\rangle = \lambda_3|v_3\rangle = 4|v_3\rangle \end{cases}}$$

које, написане у облику који одговара основној формули репрезентовања

$$\begin{cases} \hat{C}|v_1\rangle = 2|v_1\rangle + 0|v_2\rangle + 0|v_3\rangle \\ \hat{C}|v_2\rangle = 0|v_1\rangle + 4|v_2\rangle + 0|v_3\rangle \\ \hat{C}|v_3\rangle = 0|v_1\rangle + 0|v_2\rangle + 4|v_3\rangle \end{cases}$$

дају *дијагоналну форму* матрице, која уствари представља матрицу којом се оператор $\hat{C}$ представља у свом својственом базису

$$\mathscr{C}_{\text{dij}} = \left[\hat{C}\right]_{\{|v_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Сад, матрични израз

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda & -i & 0 \\ i & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

уствари представља скраћено записан систем једначина

$$\begin{cases} (3-\lambda)\xi_1 - i\xi_2 = 0 \\ i\xi_1 + (3-\lambda)\xi_2 = 0 \\ (4-\lambda)\xi_3 = 0 \end{cases}$$

Заменом прве својствене вредности $\lambda_1 = 2$ у горњи систем добија се

$$\begin{cases} (3-\lambda_1)\xi_1 - i\xi_2 = 0 \\ i\xi_1 + (3-\lambda_1)\xi_2 = 0 \\ (4-\lambda_1)\xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3-2)\xi_1 - i\xi_2 = 0 \\ i\xi_1 + (3-2)\xi_2 = 0 \\ (4-2)\xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 - i\xi_2 = 0 \\ i\xi_1 + \xi_2 = 0 \\ 2\xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = i\xi_2 \\ i\xi_1 + \xi_2 = 0 \\ \xi_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \xi_1 = i\xi_2 \\ i^2\xi_2 + \xi_2 = 0 \\ \xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = i\xi_2 \\ -\xi_2 + \xi_2 = 0 \\ \xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = i\xi_2 \\ (-1+1)\xi_2 = 0 \\ \xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = i\xi_2 \\ 0 \cdot \xi_2 = 0 \\ \xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = i\xi_2 \\ \xi_2 \in \mathbb{C} \\ \xi_3 = 0 \end{cases}$$

Компонента ξ_2 мора бити различита од нуле, иначе би се добио нулти вектор - тривијално решење својственог проблема - те се бира да је $\xi_2 = 1$, а онда је $\xi_1 = i$. Значи да својственој вредности $\lambda_1 = 2$ одговара следећи својствени вектор, записив било као матрица-колона

$$\left[|v_1\rangle\right]_{\{|v_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

било као уређена тројка

$$|v_1\rangle = (i,1,0).$$

Након замене следеће својствене вредности $\lambda_{2,3} = 4$ у систем једначина следи

$$\begin{cases} (3-\lambda_{2,3})\xi_1 - i\xi_2 = 0 \\ i\xi_1 + (3-\lambda_{2,3})\xi_2 = 0 \\ (4-\lambda_{2,3})\xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3-4)\xi_1 - i\xi_2 = 0 \\ i\xi_1 + (3-4)\xi_2 = 0 \\ (4-4)\xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\xi_1 - i\xi_2 = 0 \\ i\xi_1 - \xi_2 = 0 \\ 0\cdot\xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = -i\xi_2 \\ i\xi_1 - \xi_2 = 0 \\ \xi_3 \in \mathbb{C} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \xi_1 = -i\xi_2 \\ -i^2\xi_2 - \xi_2 = 0 \\ \xi_3 \in \mathbb{C} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = -i\xi_2 \\ \xi_2 - \xi_2 = 0 \\ \xi_3 \in \mathbb{C} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = -i\xi_2 \\ (1-1)\xi_2 = 0 \\ \xi_3 \in \mathbb{C} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = -i\xi_2 \\ 0\cdot\xi_2 = 0 \\ \xi_3 \in \mathbb{C} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = -i\xi_2 \\ \xi_2 \in \mathbb{C} \\ \xi_3 \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Услед дегенерације својствене вредности $\lambda_{2,3} = 4$ њој морају одговарати два својствена вектора - како су ξ_2 и ξ_3 произвољни комплексни бројеви, прво се бира да је $\xi_2 = 1$ и $\xi_3 = 0$, те је онда $\xi_1 = -i$, те се други својствени вектор може записати као било матрица-колона

$$\big[|v_2\rangle\big]_{\{|v_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

било као уређена тројка

$$|v_2\rangle = (-i,1,0).$$

Потом се узима да је $\xi_2 = 0$ и $\xi_3 = 1$, те је онда $\xi_1 = 0$; трећи својствени вектор дат је као матрица-колона

$$\big[|v_3\rangle\big]_{\{|v_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

или као уређена тројка

$$|v_3\rangle = (0,0,1).$$

Оба добијена својствена вектора одговарају дегенерисаној својственој вредности $\lambda_{2,3} = 4$.

Да би се добио ортонормирани својствени базис, треба Грам-Шмитовим поступком ортонормирати добијени систем својствених вектора

$$\left\{|v_1\rangle = (i,1,0), |v_2\rangle = (-i,1,0), |v_3\rangle = (0,0,1)\right\}.$$

Поступак отпочиње дељењем трећег својственог вектора (као најпростијег) његовом нормом

$$|v_3\rangle^{\text{norm}} = \frac{|v_3\rangle}{\big\||v_3\rangle\big\|} = \frac{|v_3\rangle}{\sqrt{\langle v_3|v_3\rangle}} = \frac{(0,0,1)}{\sqrt{\langle(0,0,1)|(0,0,1)\rangle}} = \frac{(0,0,1)}{\sqrt{0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 1\cdot 1}} = \frac{1}{\sqrt{1}}(0,0,1) = (0,0,1).$$

Потом се ортонормира први својствени вектор, на следећи начин

$$
\begin{aligned}
\left|v_1\right\rangle^{\text{norm}} &= \frac{\left|v_1\right\rangle - {}^{\text{norm}}\left\langle v_3 \middle| v_1\right\rangle \left|v_3\right\rangle^{\text{norm}}}{\left\| \left|v_1\right\rangle - {}^{\text{norm}}\left\langle v_3 \middle| v_1\right\rangle \left|v_3\right\rangle^{\text{norm}} \right\|} = \frac{(i,1,0) - \left\langle (0,0,1) \middle| (i,1,0)\right\rangle (0,0,1)}{\left\| (i,1,0) - \left\langle (0,0,1) \middle| (i,1,0)\right\rangle (0,0,1) \right\|} \\
&= \frac{(i,1,0) - \sqrt{0\cdot i + 0\cdot 1 + 1\cdot 0}\,(0,0,1)}{\left\| (i,1,0) - \sqrt{0\cdot i + 0\cdot 1 + 1\cdot 0}\,(0,0,1) \right\|} = \frac{(i,1,0)}{\left\|(i,1,0)\right\|} = \frac{(i,1,0)}{\sqrt{\left\langle (i,1,0) \middle| (i,1,0)\right\rangle}} \\
&= \frac{(i,1,0)}{\sqrt{i^*\cdot i + 1^*\cdot 1 + 0^*\cdot 0}} = \frac{(i,1,0)}{\sqrt{(-i)\cdot i + 1}} = \frac{(i,1,0)}{\sqrt{-i^2+1}} = \frac{(i,1,0)}{\sqrt{-(-1)+1}} = \frac{(i,1,0)}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(i,1,0)
\end{aligned}
$$

а потом и други

$$
\begin{aligned}
\left|v_2\right\rangle^{\text{norm}} &= \frac{\left|v_2\right\rangle - {}^{\text{norm}}\left\langle v_3 \middle| v_2\right\rangle \left|v_3\right\rangle^{\text{norm}} - {}^{\text{norm}}\left\langle v_1 \middle| v_2\right\rangle \left|v_1\right\rangle^{\text{norm}}}{\left\| \left|v_2\right\rangle - {}^{\text{norm}}\left\langle v_3 \middle| v_2\right\rangle \left|v_3\right\rangle^{\text{norm}} - {}^{\text{norm}}\left\langle v_1 \middle| v_2\right\rangle \left|v_1\right\rangle^{\text{norm}} \right\|} \\
&= \frac{(-i,1,0) - \left\langle (0,0,1) \middle| (-i,1,0)\right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) - \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(i,1,0) \middle| (-i,1,0)\right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}(i,1,0)}{\left\| (-i,1,0) - \left\langle (0,0,1) \middle| (-i,1,0)\right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) - \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(i,1,0) \middle| (-i,1,0)\right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}(i,1,0) \right\|} \\
&= \frac{(-i,1,0) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left\langle (0,0,1) \middle| (-i,1,0)\right\rangle (1,1,0) - \frac{1}{2}\left\langle (i,1,0) \middle| (-i,1,0)\right\rangle (i,1,0)}{\left\| (-i,1,0) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left\langle (0,0,1) \middle| (-i,1,0)\right\rangle (1,1,0) - \frac{1}{2}\left\langle (i,1,0) \middle| (-i,1,0)\right\rangle (i,1,0) \right\|} \\
&= \frac{(-i,1,0) - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{0^*\cdot(-i) + 0^*\cdot 1 + 1^*\cdot 0}\,(1,1,0) - \frac{1}{2}\sqrt{i^*\cdot(-i) + 1^*\cdot 1 + 0^*\cdot 0}\,(i,1,0)}{\left\| (-i,1,0) - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{0^*\cdot(-i) + 0^*\cdot 1 + 1^*\cdot 0}\,(1,1,0) - \frac{1}{2}\sqrt{i^*\cdot(-i) + 1^*\cdot 1 + 0^*\cdot 0}\,(i,1,0) \right\|} \\
&= \frac{(-i,1,0) - \frac{0}{\sqrt{2}}(1,1,0) - \frac{1}{2}\sqrt{(-i)\cdot(-i)+1}\,(i,1,0)}{\left\| (-i,1,0) - \frac{0}{\sqrt{2}}(1,1,0) - \frac{1}{2}\sqrt{(-i)\cdot(-i)+1}\,(i,1,0) \right\|} = \frac{(-i,1,0) - \frac{1}{2}\sqrt{i^2+1}\,(i,1,0)}{\left\| (-i,1,0) - \frac{1}{2}\sqrt{i^2+1}\,(i,1,0) \right\|} \\
&= \frac{(-i,1,0) - \frac{1}{2}\sqrt{-1+1}\,(i,1,0)}{\left\| (-i,1,0) - \frac{1}{2}\sqrt{-1+1}\,(i,1,0) \right\|} = \frac{(-i,1,0) - \frac{0}{2}(i,1,0)}{\left\| (-i,1,0) - \frac{0}{2}(i,1,0) \right\|} = \frac{(-i,1,0)}{\left\|(-i,1,0)\right\|} = \frac{(-i,1,0)}{\sqrt{\left\langle (-i,1,0) \middle| (-i,1,0)\right\rangle}} \\
&= \frac{(-i,1,0)}{\sqrt{(-i)^*\cdot(-i) + 1^*\cdot 1 + 0^*\cdot 0}} = \frac{(-i,1,0)}{\sqrt{i\cdot(-i)+1}} = \frac{(-i,1,0)}{\sqrt{-i^2+1}} = \frac{(-i,1,0)}{\sqrt{-(-1)+1}} = \frac{(-i,1,0)}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-i,1,0)
\end{aligned}
$$

чиме је добијен тражени ортонормирани својствени базис

$$
\left\{ \left|v_1\right\rangle^{\text{norm}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(i,1,0), \left|v_2\right\rangle^{\text{norm}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-i,1,0), \left|v_3\right\rangle^{\text{norm}} = (0,0,1) \right\}.
$$

(10.9) За следеће матрице одредити *дијагоналну* и *спектралну форму*, као и *унитарни оператор* који трансформацијом сличности преводи дату матрицу у њену дијагоналну форму

(а) $\mathscr{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2+2i \\ 2-2i & 1 \end{bmatrix}$, (б) $\mathscr{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2-i \\ 2+i & 7 \end{bmatrix}$,

(в) $\mathscr{C} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, (г) $\mathscr{D} = \begin{bmatrix} 2-i & -1 & 0 \\ -1 & 1-i & 1 \\ 0 & 1 & 2-i \end{bmatrix}$.

(а) Својствени проблем оператора који одговара првој матрици

$$\hat{A}|v\rangle = \lambda|v\rangle$$

написан у матричном облику гласи

$$\mathscr{A}\,\xi = \lambda\,\xi$$

односно

$$\begin{bmatrix} 3 & 2+2i \\ 2-2i & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$$

илити

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda & 2+2i \\ 2-2i & 1-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Да решење својственог проблема не би било тривијално, матрица ξ мора имати барем једну компоненту различиту од нуле, а то значи да детерминанта задате матрице мора бити једнака нули

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2+2i \\ 2-2i & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0\,.$$

Решавањем овог израза

$$\begin{aligned} &(3-\lambda)(1-\lambda)-(2+2i)(2-2i)=0 \\ &\Leftrightarrow\ 3-\lambda-3\lambda+\lambda^2-\left[2^2-(2i)^2\right]=0\ \Leftrightarrow\ \lambda^2-4\lambda+3-(4-4i^2)=0 \\ &\Leftrightarrow\ \lambda^2-4\lambda+3-(4+4)=0\ \Leftrightarrow\ \lambda^2-4\lambda+3-8=0 \end{aligned}$$

добија се *карактеристична једначина* (*карактеристични полином*) задате матрице

$$\lambda^2-4\lambda-5=0$$

чијим се решавањем

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot1\cdot(-5)}}{2\cdot1} = \frac{4\pm\sqrt{16+20}}{2} = \frac{4\pm\sqrt{36}}{2} = \frac{4\pm6}{2} = 2\pm3$$

добијају две различите својствене вредности матрице $\mathscr{A}$

$$\lambda_1 = -1 \text{ и } \lambda_2 = 5$$

којима одговарају две својствене једначине

$$\begin{cases} \hat{A}|v_1\rangle = \lambda_1 |v_1\rangle = (-1)|v_1\rangle \\ \hat{A}|v_2\rangle = \lambda_2 |v_2\rangle = 5|v_2\rangle \end{cases}$$

које, написане у облику који одговара основној формули репрезентовања

$$\begin{cases} \hat{A}|v_1\rangle = (-1)|v_1\rangle + 0|v_2\rangle \\ \hat{A}|v_2\rangle = 0|v_1\rangle + 5|v_2\rangle \end{cases}$$

дају *дијагоналну форму* матрице, која је уствари матрица којом се оператор $\hat{A}$ представља у свом својственом базису

$$\mathscr{A}_{\text{dij}} = \left[\hat{A}\right]_{\{|v_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Сад, матричним изразом

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda & 2+2i \\ 2-2i & 1-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

скраћено се записује систем једначина

$$\begin{cases} (3-\lambda)\xi_1 + (2+2i)\xi_2 = 0 \\ (2-2i)\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2 = 0 \end{cases}$$

Заменом прве својствене вредности $\lambda_1 = -1$ у горњи систем следи

$$\begin{cases} (3-\lambda_1)\xi_1 + (2+2i)\xi_2 = 0 \\ (2-2i)\xi_1 + (1-\lambda_1)\xi_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[3-(-1)\right]\xi_1 + (2+2i)\xi_2 = 0 \\ (2-2i)\xi_1 + \left[1-(-1)\right]\xi_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\xi_1 + 2(1+i)\xi_2 = 0 \\ 2(1-i)\xi_1 + 2\xi_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\xi_1 + (1+i)\xi_2 = 0 \\ (1-i)\xi_1 + \xi_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\xi_1 + (1+i)\xi_2 = 0 \\ \xi_2 = -(1-i)\xi_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\xi_1 - (1+i)(1-i)\xi_1 = 0 \\ \xi_2 = -(1-i)\xi_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\xi_1 - (1^2 - i^2)\xi_1 = 0 \\ \xi_2 = -(1-i)\xi_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2 - 1^2 + i^2)\xi_1 = 0 \\ \xi_2 = -(1-i)\xi_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2-1-1)\xi_1 = 0 \\ \xi_2 = -(1-i)\xi_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0\cdot\xi_1 = 0 \\ \xi_2 = -(1-i)\xi_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 \in \mathbb{C} \\ \xi_2 = -(1-i)\xi_1 \end{cases}$$

Како добијене компоненте првог својственог вектора не смеју све бити једнаке нули (нулти вектор био би тривијално решење својственог проблема), то се бира да је $\xi_1 = -1$, а онда је $\xi_2 = 1-i$; први својствени вектор, који одговара првој својственој вредности $\lambda_1 = -1$, може се записати као матрица-колона

$$\left[|v_1\rangle\right]_{\{|v_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1-i \end{bmatrix}$$

или као уређени пар

$$|v_1\rangle = (-1, 1-i)\,.$$

Након замене друге својствене вредности $\lambda_2 = 5$ у систем једначина следи

$$\begin{cases}(3-\lambda_2)\xi_1 + (2+2i)\xi_2 = 0\\ (2-2i)\xi_1 + (1-\lambda_2)\xi_2 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(3-5)\xi_1 + (2+2i)\xi_2 = 0\\ (2-2i)\xi_1 + (1-5)\xi_2 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2\xi_1 + 2(1+i)\xi_2 = 0\\ 2(1-i)\xi_1 - 4\xi_2 = 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-\xi_1 + (1+i)\xi_2 = 0\\ (1-i)\xi_1 - 2\xi_2 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\xi_1 = (1+i)\xi_2\\ (1-i)\xi_1 - 2\xi_2 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\xi_1 = (1+i)\xi_2\\ (1-i)(1+i)\xi_2 - 2\xi_2 = 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\xi_1 = (1+i)\xi_2\\ (1^2-i^2)\xi_2 - 2\xi_2 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\xi_1 = (1+i)\xi_2\\ (1+1-2)\xi_2 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\xi_1 = (1+i)\xi_2\\ 0\cdot\xi_2 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\xi_1 = (1+i)\xi_2\\ \xi_2 \in \mathbb{C}\end{cases}$$

Да би се избегло добијање нултог вектора, бира се да је $\xi_2 = 1$, одакле следи да је $\xi_1 = 1+i$. То значи да се други својствени вектор, који одговара другој својственој вредности $\lambda_2 = 5$, може представити било као матрица-колона

$$\big[|v_2\rangle\big]_{\{|v_i\rangle\}} = \begin{bmatrix}1+i\\ 1\end{bmatrix}$$

било као уређена тројка

$$|v_2\rangle = (1+i, 1)\,.$$

Да би се могла добити *спектрална форма*, неопходно је да добијена два својствена вектора

$$\big\{|v_1\rangle = (-1, 1-i), |v_2\rangle = (1+i, 1)\big\}$$

буду Грам-Шмитовим поступком ортонормирани.

Ипак, будући да су добијени својствени вектори већ *ортогонални* међусобно

$$\langle v_1|v_2\rangle = \langle(-1,1-i)|(1+i,1)\rangle = \sqrt{(-1)^*(1+i) + (1-i)^*\cdot 1} = \sqrt{-(1+i)+(1+i)} = \sqrt{-1-i+1+i} = 0$$

довољно их је *нормирати*, односно поделити сваки од њих са својом нормом

$$|v_1\rangle^{\text{norm}} = \frac{|v_1\rangle}{\||v_1\rangle\|} = \frac{|v_1\rangle}{\sqrt{\langle v_1|v_1\rangle}} = \frac{(-1,1-i)}{\sqrt{\langle(-1,1-i)|(-1,1-i)\rangle}} = \frac{(-1,1-i)}{\sqrt{(-1)^*(-1)+(1-i)^*(1-i)}}$$

$$= \frac{(-1,1-i)}{\sqrt{(-1)(-1)+(1+i)(1-i)}} = \frac{(-1,1-i)}{\sqrt{1+1^2-i^2}} = \frac{(-1,1-i)}{\sqrt{1+1-(-1)}} = \frac{(-1,1-i)}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1-i)$$

$$|v_2\rangle^{\text{norm}} = \frac{|v_2\rangle}{\||v_2\rangle\|} = \frac{|v_2\rangle}{\sqrt{\langle v_2|v_2\rangle}} = \frac{(1+i,1)}{\sqrt{\langle(1+i,1)|(1+i,1)\rangle}} = \frac{(1+i,1)}{\sqrt{(1+i)^*(1+i)+1^*\cdot 1}}$$

$$= \frac{(1+i,1)}{\sqrt{(1-i)(1+i)+1}} = \frac{(1+i,1)}{\sqrt{1^2-i^2+1}} = \frac{(1+i,1)}{\sqrt{1^2-(-1)+1}} = \frac{(1+i,1)}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1+i,1)$$

чиме се добија потребни ортонормирани својствени базис

$$\left\{ |v_1\rangle^{\text{norm}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1-i), |v_2\rangle^{\text{norm}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1+i, 1) \right\}$$

или, записано у облику матрица-колона (због изоморфизма векторског простора матрица и векторског простора уређених парова)

$$\left\{ |v_1\rangle^{\text{norm}} \to \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1-i \end{bmatrix}, |v_2\rangle^{\text{norm}} \to \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Сада се најзад може извести *спектрална форма* задате матрице, као линеарна комбинација пројектора на одговарајуће једнодимензионалне својствене потпросторе

$$\hat{A} = \sum_{i=1}^{2} \lambda_i \hat{P}_{\lambda_i} = \lambda_1 \hat{P}_{\lambda_1} + \lambda_2 \hat{P}_{\lambda_2} = \lambda_1 |v_1\rangle^{\text{norm norm}}\langle v_1| + \lambda_2 |v_2\rangle^{\text{norm norm}}\langle v_2|$$

наравно, написана у матричном простору као линеарна комбинација одговарајућих матрица-колона и матрица-врста

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}_{\text{spektr}} &= (-1)\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1-i \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1-i \end{bmatrix}^{\dagger} + 5\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \end{bmatrix}^{\dagger} \\
&= -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ 1-i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & (1-i)^* \end{bmatrix} + \frac{5}{3}\begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (1+i)^* & 1 \end{bmatrix} \\
&= -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ 1-i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1+i \end{bmatrix} + \frac{5}{3}\begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1-i & 1 \end{bmatrix} \\
&= -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} (-1)(-1) & (-1)(1+i) \\ (1-i)(-1) & (1-i)(1+i) \end{bmatrix} + \frac{5}{3}\begin{bmatrix} (1+i)(1-i) & (1+i)\cdot 1 \\ 1\cdot(1-i) & 1\cdot 1 \end{bmatrix} \\
&= -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1-i \\ -1+i & 1^2-i^2 \end{bmatrix} + \frac{5}{3}\begin{bmatrix} 1^2-i^2 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix} \\
&= -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1-i \\ -1+i & 1-(-1) \end{bmatrix} + \frac{5}{3}\begin{bmatrix} 1-(-1) & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix} \\
&= -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1-i \\ -1+i & 2 \end{bmatrix} + \frac{5}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Провера тачности спектралне форме врши се множењем квадратних матрица скаларима а потом њиховим сабирањем

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}_{\text{spektr}} &= \frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix} (-1)\cdot 1 & (-1)\cdot(-1-i) \\ (-1)\cdot(-1+i) & (-1)\cdot 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5\cdot 2 & 5(1+i) \\ 5(1-i) & 5\cdot 1 \end{bmatrix}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix} -1 & 1+i \\ 1-i & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 5+5i \\ 5-5i & 5 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1+10 & 1+i+5+5i \\ 1-i+5-5i & -2+5 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 9 & 6+6i \\ 6-6i & 3 \end{bmatrix} = \frac{3}{3}\begin{bmatrix} 3 & 2+2i \\ 2-2i & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2+2i \\ 2-2i & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

чиме се добија, баш како и треба, управо полазна, задата матрица $\mathscr{A}$.

Унитарни оператор, односно матрица којом се он представља у матричном простору, добија се уједињавањем компоненти оба својствена вектора уз задржавање нетакнутог истог коефицијента испред оба вектора

$$\mathscr{U} = \Big[|v_1\rangle^{\mathrm{norm}} \Big| |v_2\rangle^{\mathrm{norm}} \Big] = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\begin{array}{c|c} -1 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{array} \right] = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix}.$$

Потребан је и оператор адјунгован добијеном, који се добија транспоновањем његових врста и колона, уз комплексно коњуговање комплексних матричних елемената

$$\mathscr{U}^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix}^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 & (1-i)^{*} \\ (1+i)^{*} & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix},$$

да би било могуће проверити формулу за трансформацију сличности

$$\mathscr{A}_{\mathrm{dij}} = \mathscr{U}^{\dagger} \mathscr{A} \mathscr{U}$$

на следећи начин

$$\begin{aligned}
\mathscr{U}^{\dagger} \mathscr{A} \mathscr{U} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2+2i \\ 2-2i & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2(1+i) \\ 2(1-i) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3(-1)+2(1+i)(1-i) & 3(1+i)+2(1+i) \\ 2(1-i)(-1)+(1-i) & 2(1-i)(1+i)+1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3+2(1^2-i^2) & (3+2)(1+i) \\ (-2+1)(1-i) & 2(1^2-i^2)+1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3+2\big[1-(-1)\big] & 5(1+i) \\ -(1-i) & 2\big[1-(-1)\big]+1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3+2\cdot 2 & 5(1+i) \\ -(1-i) & 2\cdot 2+1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5(1+i) \\ -(1-i) & 5 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} (-1)\cdot 1-(1+i)(1-i) & (-1)\cdot 5(1+i)+(1+i)5 \\ (1-i)-(1-i) & (1-i)5(1+i)+1\cdot 5 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1-(1^2-i^2) & (-5+5)(1+i) \\ (1-1)(1-i) & 5(1^2-i^2)+5 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1-\big[1-(-1)\big] & 0 \\ 0 & 5\big[1-(-1)\big]+5 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1-2 & 0 \\ 0 & 5\cdot 2+5 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/3 & 0 \\ 0 & 15/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \mathscr{A}_{\mathrm{dij}}
\end{aligned}$$

чиме је трансформација сличности потврђена.

(б) Својствени проблем оператора који одговара другој матрици

$$\hat{B}|v\rangle = \lambda|v\rangle$$

написан у матричном облику гласи

$$\mathscr{B}\,\xi = \lambda\,\xi$$

односно

$$\begin{bmatrix} 3 & 2-i \\ 2+i & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$$

илити

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda & 2-i \\ 2+i & 7-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Да решење својственог проблема не би било тривијално, матрица ξ мора имати барем једну компоненту различиту од нуле, а то значи да детерминанта задате матрице мора бити једнака нули

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2-i \\ 2+i & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0\,.$$

Решавањем овог израза

$$\begin{aligned} &(3-\lambda)(7-\lambda)-(2-i)(2+i)=0 \\ \Leftrightarrow\ & 21-7\lambda-3\lambda+\lambda^2-(2^2-i^2)=0 \\ \Leftrightarrow\ & \lambda^2-10\lambda+21-\left[4-(-1)\right]=0 \\ \Leftrightarrow\ & \lambda^2-10\lambda+21-5=0 \end{aligned}$$

добија се *карактеристична једначина* (*карактеристични полином*) задате матрице

$$\lambda^2-10\lambda+16=0$$

чијим се решавањем

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(-10)\pm\sqrt{(-10)^2-4\cdot 1\cdot 16}}{2\cdot 1} = \frac{10\pm\sqrt{100-64}}{2} = \frac{10\pm\sqrt{36}}{2} = \frac{10\pm 6}{2} = 5\pm 3$$

добијају две различите својствене вредности матрице $\mathscr{B}$

$$\lambda_1 = 2 \text{ и } \lambda_2 = 8$$

којима одговарају две својствене једначине

$$\underline{\begin{cases} \hat{B}|v_1\rangle = \lambda_1|v_1\rangle = 2|v_1\rangle \\ \hat{B}|v_2\rangle = \lambda_2|v_2\rangle = 8|v_2\rangle \end{cases}}$$

које, написане у облику који одговара основној формули репрезентовања

$$\begin{cases} \hat{B}|v_1\rangle = 2|v_1\rangle + 0|v_2\rangle \\ \hat{B}|v_2\rangle = 0|v_1\rangle + 8|v_2\rangle \end{cases}$$

дају *дијагоналну форму* матрице, која је уствари матрица којом се оператор $\hat{B}$ представља у свом својственом базису

$$\mathscr{B}_{\text{dij}} = \left[\hat{B}\right]_{\{|v_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

Као и увек, матричним изразом

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda & 2-i \\ 2+i & 7-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

скраћено се записује систем једначина

$$\begin{cases} (3-\lambda)\xi_1 + (2-i)\xi_2 = 0 \\ (2+i)\xi_1 + (7-\lambda)\xi_2 = 0 \end{cases}$$

Заменом прве својствене вредности $\lambda_1 = 2$ у горњи систем следи

$$\begin{cases} (3-\lambda_1)\xi_1 + (2-i)\xi_2 = 0 \\ (2+i)\xi_1 + (7-\lambda_1)\xi_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3-2)\xi_1 + (2-i)\xi_2 = 0 \\ (2+i)\xi_1 + (7-2)\xi_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 + (2-i)\xi_2 = 0 \\ (2+i)\xi_1 + 5\xi_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = -(2-i)\xi_2 \\ (2+i)\xi_1 + 5\xi_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi_1 = -(2-i)\xi_2 \\ -(2+i)(2-i)\xi_2 + 5\xi_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = -(2-i)\xi_2 \\ -(2^2 - i^2)\xi_2 + 5\xi_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = -(2-i)\xi_2 \\ -\left[4-(-1)\right]\xi_2 + 5\xi_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = -(2-i)\xi_2 \\ (-5+5)\xi_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = -(2-i)\xi_2 \\ 0 \cdot \xi_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = -(2-i)\xi_2 \\ \xi_2 \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Како добијене компоненте првог својственог вектора не смеју све бити једнаке нули, то се бира да је $\xi_2 = -1$, а онда је $\xi_1 = 2-i$; први својствени вектор, који одговара првој својственој вредности $\lambda_1 = 2$, може се записати као матрица-колона

$$\left[|v_1\rangle\right]_{\{|v_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 2-i \\ -1 \end{bmatrix}$$

или као уређени пар

$$|v_1\rangle = (2-i, -1).$$

Након замене друге својствене вредности $\lambda_2 = 8$ у систем једначина следи

$$\begin{cases}(3-\lambda_2)\xi_1 + (2-i)\xi_2 = 0 \\ (2+i)\xi_1 + (7-\lambda_2)\xi_2 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(3-8)\xi_1 + (2-i)\xi_2 = 0 \\ (2+i)\xi_1 + (7-8)\xi_2 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-5\xi_1 + (2-i)\xi_2 = 0 \\ (2+i)\xi_1 - \xi_2 = 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-5\xi_1 + (2-i)\xi_2 = 0 \\ \xi_2 = (2+i)\xi_1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-5\xi_1 + (2-i)(2+i)\xi_1 = 0 \\ \xi_2 = (2+i)\xi_1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-5\xi_1 + (2^2-i^2)\xi_1 = 0 \\ \xi_2 = (2+i)\xi_1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-5\xi_1 + \left[4-(-1)\right]\xi_1 = 0 \\ \xi_2 = (2+i)\xi_1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(-5+5)\xi_1 + 5\xi_1 = 0 \\ \xi_2 = (2+i)\xi_1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0\cdot\xi_1 = 0 \\ \xi_2 = (2+i)\xi_1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\xi_1 \in \mathbb{C} \\ \xi_2 = (2+i)\xi_1\end{cases}$$

Да би се избегло добијање нултог вектора, бира се да је $\xi_1 = 1$, одакле следи да је $\xi_2 = 2+i$. То значи да се други својствени вектор, који одговара другој својственој вредности $\lambda_2 = 8$, може представити било као матрица-колона

$$\left[|v_2\rangle\right]_{\{|v_i\rangle\}} = \begin{bmatrix}1 \\ 2+i\end{bmatrix}$$

било као уређена тројка

$$|v_2\rangle = (1, 2+i).$$

Да би се могла добити *спектрална форма*, неопходно је да добијена два својствена вектора

$$\left\{|v_1\rangle = (2-i,-1), |v_2\rangle = (1,2+i)\right\}$$

буду Грам-Шмитовим поступком ортонормирани.

Пошто су добијени својствени вектори већ *ортогонални* међусобно

$$\langle v_1|v_2\rangle = \langle(2-i,-1)|(1,2+i)\rangle = \sqrt{(2-i)^*1+(-1)^*(2+i)} = \sqrt{(2+i)-(2+i)} = \sqrt{0} = 0$$

довољно их је *нормирати*, односно поделити сваки од њих са својом нормом

$$|v_1\rangle^{\text{norm}} = \frac{|v_1\rangle}{\||v_1\rangle\|} = \frac{|v_1\rangle}{\sqrt{\langle v_1|v_1\rangle}} = \frac{(2-i,-1)}{\sqrt{\langle(2-i,-1)|(2-i,-1)\rangle}} = \frac{(2-i,-1)}{\sqrt{(2-i)^*(2-i)+(-1)^*(-1)}}$$

$$= \frac{(2-i,-1)}{\sqrt{(2+i)(2-i)+1}} = \frac{(2-i,-1)}{\sqrt{2^2-i^2+1}} = \frac{(2-i,-1)}{\sqrt{4-(-1)+1}} = \frac{(2-i,-1)}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2-i,-1)$$

$$|v_2\rangle^{\text{norm}} = \frac{|v_2\rangle}{\||v_2\rangle\|} = \frac{|v_2\rangle}{\sqrt{\langle v_2|v_2\rangle}} = \frac{(1,2+i)}{\sqrt{\langle(1,2+i)|(1,2+i)\rangle}} = \frac{(1,2+i)}{\sqrt{1^*\cdot 1+(2+i)^*\cdot(2+i)}}$$

$$= \frac{(1,2+i)}{\sqrt{1+(2-i)(2+i)}} = \frac{(1,2+i)}{\sqrt{1+2^2-i^2}} = \frac{(1,2+i)}{\sqrt{1+4-(-1)}} = \frac{(1,2+i)}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2+i)$$

те је тако добијен потребни ортонормирани својствени базис

$$\left\{|v_1\rangle^{\text{norm}} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2-i,-1), |v_2\rangle^{\text{norm}} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2+i)\right\}$$

или, записано у облику матрица-колона (због изоморфизма векторског простора матрица и векторског простора уређених парова)

$$\left\{|v_1\rangle^{\text{norm}} \to \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 2-i \\ -1 \end{bmatrix}, |v_2\rangle^{\text{norm}} \to \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2+i \end{bmatrix}\right\}.$$

Сада се најзад може извести *спектрална форма* задате матрице, као линеарна комбинација пројектора на одговарајуће једнодимензионалне својствене потпросторе

$$\hat{B} = \sum_{i=1}^{2} \lambda_i \hat{P}_{\lambda_i} = \lambda_1 \hat{P}_{\lambda_1} + \lambda_2 \hat{P}_{\lambda_2} = \lambda_1 |v_1\rangle^{\text{norm norm}}\langle v_1| + \lambda_2 |v_2\rangle^{\text{norm norm}}\langle v_2|$$

наравно, написана у матричном простору као линеарна комбинација одговарајућих матрица-колона и матрица-врста

$$\begin{aligned}\mathscr{B}_{\text{spektr}} &= 2\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 2-i \\ -1 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 2-i \\ -1 \end{bmatrix}^{\dagger} + 8\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2+i \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2+i \end{bmatrix}^{\dagger} \\ &= \frac{2}{6}\begin{bmatrix} 2-i \\ -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (2-i)^* & -1 \end{bmatrix} + \frac{8}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ 2+i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & (2+i)^* \end{bmatrix}\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}\mathscr{B}_{\text{spektr}} &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2-i \\ -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2+i & -1 \end{bmatrix} + \frac{4}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 2+i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2-i \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} (2-i)(2+i) & (2-i)(-1) \\ (-1)(2+i) & (-1)(-1) \end{bmatrix} + \frac{4}{3}\begin{bmatrix} 1\cdot 1 & 1\cdot(2-i) \\ (2+i)\cdot 1 & (2+i)(2-i) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2^2-i^2 & -2+i \\ -2-i & 1 \end{bmatrix} + \frac{4}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2-i \\ 2+i & 2^2-i^2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 5 & -2+i \\ -2-i & 1 \end{bmatrix} + \frac{4}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2-i \\ 2+i & 5 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Провера тачности спектралне форме врши се множењем квадратних матрица скаларом а потом њиховим сабирањем

$$\begin{aligned}\mathscr{B}_{\text{spektr}} &= \frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix} 5 & -2+i \\ -2-i & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 4(2-i) \\ 4(2+i) & 20 \end{bmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix} 5 & -2+i \\ -2-i & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 8-4i \\ 8+4i & 20 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 9 & 6-3i \\ 6+3i & 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2-i \\ 2+i & 7 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

чиме се добија, баш како и треба, управо полазна, задата матрица $\mathscr{B}$.

Унитарни оператор, односно матрица којом се он представља у матричном простору, добија се уједињавањем компоненти оба својствена вектора уз задржавање нетакнутог истог коефицијента испред оба вектора

$$\mathscr{U} = \left[|v_1\rangle^{\text{norm}} \middle| |v_2\rangle^{\text{norm}}\right] = \frac{1}{\sqrt{6}}\left[\begin{array}{c|c} 2-i & 1 \\ -1 & 2+i \end{array}\right] = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 2-i & 1 \\ -1 & 2+i \end{bmatrix}.$$

Потребан је и оператор адјунгован добијеном, који се добија транспоновањем његових врста и колона, уз комплексно коњуговање комплексних матричних елемената

$$\mathscr{U}^{\dagger}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}2-i & 1\\ -1 & 2+i\end{bmatrix}^{\dagger}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}(2-i)^{*} & -1\\ 1 & (2+i)^{*}\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}2+i & -1\\ 1 & 2-i\end{bmatrix},$$

да би било могуће проверити формулу за трансформацију сличности

$$\mathscr{B}_{\text{dij}}=\mathscr{U}^{\dagger}\mathscr{B}\,\mathscr{U}$$

на следећи начин

$$\begin{aligned}\mathscr{U}^{\dagger}\mathscr{B}\,\mathscr{U}&=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}2+i & -1\\ 1 & 2-i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2-i\\ 2+i & 7\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}2-i & 1\\ -1 & 2+i\end{bmatrix}\\&=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}2+i & -1\\ 1 & 2-i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\cdot(2-i)+(2-i)\cdot(-1) & 3\cdot 1+(2-i)(2+i)\\ (2+i)(2-i)+7\cdot(-1) & (2+i)\cdot 1+7\cdot(2+i)\end{bmatrix}\\&=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}2+i & -1\\ 1 & 2-i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6-3i-2+i & 3+2^{2}-i^{2}\\ 2^{2}-i^{2}-7 & 2+i+14+7i\end{bmatrix}\end{aligned}$$

односно

$$\begin{aligned}\mathscr{U}^{\dagger}\mathscr{B}\,\mathscr{U}&=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}2+i & -1\\ 1 & 2-i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4-2i & 8\\ -2 & 16+8i\end{bmatrix}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}2+i & -1\\ 1 & 2-i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2(2-i) & 2\cdot 4\\ 2\cdot(-1) & 2(8+4i)\end{bmatrix}\\&=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}2+i & -1\\ 1 & 2-i\end{bmatrix}2\begin{bmatrix}2-i & 4\\ -1 & 8+4i\end{bmatrix}\\&=\frac{2}{6}\begin{bmatrix}(2+i)(2-i)+(-1)\cdot(-1) & (2+i)\cdot 4+(-1)\cdot(8+4i)\\ 1\cdot(2-i)+(2-i)\cdot(-1) & 1\cdot 4+(2-i)(8+4i)\end{bmatrix}\\&=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2^{2}-i^{2}+1 & 8+4i-8-4i\\ 2-i-2+i & 4+16-8i+8i-4i^{2}\end{bmatrix}\\&=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}4-(-1)+1 & 0\\ 0 & 24+8i-8i\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}6 & 0\\ 0 & 24\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 8\end{bmatrix}=\mathscr{B}_{\text{dij}}\end{aligned}$$

чиме је трансформација сличности потврђена.

(в) Својствени проблем оператора који одговара трећој матрици

$$\hat{C}|v\rangle=\lambda|v\rangle$$

написан у матричном облику гласи

$$\mathscr{C}\,\xi=\lambda\,\xi$$

односно

$$\begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\ -2 & 0 & -2\\ -1 & 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{bmatrix}$$

или

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 2 & 1 \\ -2 & -\lambda & -2 \\ -1 & 2 & -\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Да решење својственог проблема не би било тривијално, матрица ξ мора имати барем једну компоненту различиту од нуле, а то значи да детерминанта задате матрице мора бити једнака нули

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 1 \\ -2 & -\lambda & -2 \\ -1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 .$$

Решавањем овог израза

$$(-\lambda)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -2 & -\lambda \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

то јест

$$(-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & -\lambda \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow\ (-\lambda)\big[(-\lambda)(-\lambda) - 2\cdot(-2)\big] - 2\big[(-2)(-\lambda) - (-1)\cdot(-2)\big] + \big[(-2)\cdot 2 - (-1)(-\lambda)\big] = 0$$

$$\Leftrightarrow\ (-\lambda)(\lambda^2 + 4) - 2(2\lambda - 2) + (-4 - \lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow\ -\lambda^3 - 4\lambda - 4\lambda + 4 - 4 - \lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow\ -\lambda^3 - 9\lambda + 4 - 4 = 0$$

добија се *карактеристична једначина* (*карактеристични полином*) задате матрице

$$\lambda^3 + 9\lambda = 0$$

чијим се решавањем

$$\lambda(\lambda^2 + 9) = 0 \ \Leftrightarrow\ \lambda(\lambda^2 + 9) = 0\cdot 0 \ \Rightarrow \underline{\begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda^2 + 9 = 0 \end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda^2 = -9 \end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = \pm\sqrt{-9} \end{cases}}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = \pm\sqrt{9\cdot(-1)} \end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = \pm\sqrt{9}\cdot\sqrt{-1} \end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = \pm 3i \end{cases}}$$

добијају три различите својствене вредности матрице $\mathscr{C}$

$$\lambda_1 = -3i\,,\ \lambda_2 = 0\ \text{ и }\ \lambda_3 = 3i$$

којима одговарају три својствене једначине

$$\underline{\begin{cases} \hat{C}|v_1\rangle = \lambda_1|v_1\rangle = (-3i)|v_1\rangle \\ \hat{C}|v_2\rangle = \lambda_2|v_2\rangle = 0|v_2\rangle \\ \hat{C}|v_3\rangle = \lambda_3|v_3\rangle = 3i|v_3\rangle \end{cases}}$$

које, написане у облику који одговара основној формули репрезентовања

$$\begin{cases} \hat{C}|v_1\rangle = (-3i)|v_1\rangle + 0|v_2\rangle + 0|v_3\rangle \\ \hat{C}|v_2\rangle = 0|v_1\rangle + 0|v_2\rangle + 0|v_3\rangle \\ \hat{C}|v_3\rangle = 0|v_1\rangle + 0|v_2\rangle + 3i|v_3\rangle \end{cases}$$

дају *дијагоналну форму* матрице, тј. матрицу оператора $\hat{C}$ у његовом својственом базису

$$\mathscr{C}_{\text{dij}} = \left[\hat{C}\right]_{\{|v_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} -3i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3i \end{bmatrix}.$$

Као и увек, матричним изразом

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 2 & 1 \\ -2 & -\lambda & -2 \\ -1 & 2 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

скраћено се записује систем једначина

$$\begin{cases} -\lambda\xi_1 + 2\xi_2 + \xi_3 = 0 \\ -2\xi_1 - \lambda\xi_2 - 2\xi_3 = 0 \\ -\xi_1 + 2\xi_2 - \lambda\xi_3 = 0 \end{cases}$$

Заменом прве својствене вредности $\lambda_1 = -3i$ у горњи систем следи

$$\begin{cases} -\lambda_1\xi_1 + 2\xi_2 + \xi_3 = 0 \\ -2\xi_1 - \lambda_1\xi_2 - 2\xi_3 = 0 \\ -\xi_1 + 2\xi_2 - \lambda_1\xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3i\,\xi_1 + 2\xi_2 + \xi_3 = 0 \\ -2\xi_1 + 3i\,\xi_2 - 2\xi_3 = 0 \\ -\xi_1 + 2\xi_2 + 3i\,\xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_3 = -3i\,\xi_1 - 2\xi_2 \\ -2\xi_1 + 3i\,\xi_2 - 2\xi_3 = 0 \\ -\xi_1 + 2\xi_2 + 3i\,\xi_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \xi_3 = -3i\,\xi_1 - 2\xi_2 \\ -2\xi_1 + 3i\,\xi_2 + 6i\,\xi_1 + 4\xi_2 = 0 \\ -\xi_1 + 2\xi_2 + 3i\,\xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_3 = -3i\,\xi_1 - 2\xi_2 \\ (-2+6i)\xi_1 + (4+3i)\xi_2 = 0 \\ -\xi_1 + 2\xi_2 + 3i\,\xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_3 = -3i\,\xi_1 - 2\xi_2 \\ \xi_2 = \dfrac{2-6i}{4+3i}\xi_1 \\ -\xi_1 + 2\xi_2 + 3i\,\xi_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \xi_3 = -3i\,\xi_1 + \dfrac{-4+12i}{4+3i}\xi_1 \\ \xi_2 = \dfrac{2-6i}{4+3i}\xi_1 \\ -\xi_1 + 2\xi_2 + 3i\,\xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_3 = \dfrac{-9i^2 - 12i - 4 + 12i}{4+3i}\xi_1 \\ \xi_2 = \dfrac{2-6i}{4+3i}\xi_1 \\ -\xi_1 + 2\xi_2 + 3i\,\xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_3 = \dfrac{5}{4+3i}\xi_1 \\ \xi_2 = \dfrac{2-6i}{4+3i}\xi_1 \\ -\xi_1 + 2\xi_2 + 3i\,\xi_3 = 0 \end{cases}$$

односно

$$\Rightarrow \begin{cases} \xi_3 = \dfrac{5}{4+3i}\xi_1 \\ \xi_2 = \dfrac{2-6i}{4+3i}\xi_1 \\ -\xi_1 + 2\dfrac{2-6i}{4+3i}\xi_1 + 3i\dfrac{5}{4+3i}\xi_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_3 = \dfrac{5}{4+3i}\xi_1 \\ \xi_2 = \dfrac{2-6i}{4+3i}\xi_1 \\ \dfrac{-4-3i+4-12i+15i}{4+3i}\xi_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_3 = \dfrac{5}{4+3i}\xi_1 \\ \xi_2 = \dfrac{2-6i}{4+3i}\xi_1 \\ \dfrac{4-4+15i-15i}{-4+3i}\xi_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \xi_3 = \dfrac{5}{4+3i}\xi_1 \\ \xi_2 = \dfrac{2-6i}{4+3i}\xi_1 \\ 0\cdot\xi_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_3 = \dfrac{5}{4+3i}\xi_1 \\ \xi_2 = \dfrac{2-6i}{4+3i}\xi_1 \\ \xi_1 \in \mathbb{C} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 \in \mathbb{C} \\ \xi_2 = \dfrac{2-6i}{4+3i}\xi_1 \\ \xi_3 = \dfrac{5}{4+3i}\xi_1 \end{cases}$$

Како добијене компоненте првог својственог вектора не смеју све бити једнаке нули, то се бира да је $\xi_1 = 4+3i$, а онда су $\xi_2 = 2-6i$ и $\xi_3 = 5$; први својствени вектор, који одговара првој својственој вредности $\lambda_1 = -3i$, може се записати као матрица-колона

$$\big[|v_1\rangle\big]_{\{|v_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 4+3i \\ 2-6i \\ 5 \end{bmatrix}$$

или као уређена тројка

$$|v_1\rangle = (4+3i, 2-6i, 5)\,.$$

Након замене друге својствене вредности $\lambda_2 = 0$ у систем једначина следи

$$\begin{cases} -\lambda_2\xi_1 + 2\xi_2 + \xi_3 = 0 \\ -2\xi_1 - \lambda_2\xi_2 - 2\xi_3 = 0 \\ -\xi_1 + 2\xi_2 - \lambda_2\xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -0\cdot\xi_1 + 2\xi_2 + \xi_3 = 0 \\ 2\xi_1 - 0\cdot\xi_2 + 2\xi_3 = 0 \\ -\xi_1 + 2\xi_2 - 0\cdot\xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\xi_2 + \xi_3 = 0 \\ 2\xi_1 + 2\xi_3 = 0 \\ \xi_1 - 2\xi_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\xi_2 + \xi_3 = 0 \\ \xi_1 + \xi_3 = 0 \\ \xi_1 = 2\xi_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\xi_2 + \xi_3 = 0 \\ 2\xi_2 + \xi_3 = 0 \\ \xi_1 = 2\xi_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\xi_2 + \xi_3 = 0 \\ \xi_3 = -2\xi_2 \\ \xi_1 = 2\xi_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\xi_2 - 2\xi_2 = 0 \\ \xi_3 = -2\xi_2 \\ \xi_1 = 2\xi_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2-2)\xi_2 = 0 \\ \xi_3 = -2\xi_2 \\ \xi_1 = 2\xi_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0\cdot\xi_2 = 0 \\ \xi_3 = -2\xi_2 \\ \xi_1 = 2\xi_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_2 \in \mathbb{C} \\ \xi_3 = -2\xi_2 \\ \xi_1 = 2\xi_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = 2\xi_2 \\ \xi_2 \in \mathbb{C} \\ \xi_3 = -2\xi_2 \end{cases}$$

Да би се избегло добијање нултог вектора, бира се да је $\xi_2 = 1$, одакле следи да су $\xi_1 = 2$ и $\xi_3 = -2$. То значи да се други својствени вектор, који одговара другој својственој вредности $\lambda_2 = 0$, може представити било као матрица-колона

$$\left[|v_2\rangle\right]_{\{|v_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}2\\1\\-2\end{bmatrix}$$

било као уређена тројка

$$|v_2\rangle=(2,1,-2)\,.$$

На крају се замени трећа својствена вредност $\lambda_3=3i$ у поменути систем, те се добија

$$\begin{cases}-\lambda_3\xi_1+2\xi_2+\xi_3=0\\-2\xi_1-\lambda_3\xi_2-2\xi_3=0\\-\xi_1+2\xi_2-\lambda_3\xi_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3i\,\xi_1+2\xi_2+\xi_3=0\\-2\xi_1-3i\,\xi_2-2\xi_3=0\\-\xi_1+2\xi_2-3i\,\xi_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3i\,\xi_1-2\xi_2-\xi_3=0\\2\xi_1+3i\,\xi_2+2\xi_3=0\\\xi_1-2\xi_2+3i\,\xi_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\xi_3=3i\,\xi_1-2\xi_2\\2\xi_1+3i\,\xi_2+2\xi_3=0\\\xi_1-2\xi_2+3i\,\xi_3=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\xi_3=3i\,\xi_1-2\xi_2\\2\xi_1+3i\,\xi_2+6i\,\xi_1-4\xi_2=0\\\xi_1-2\xi_2+3i\,\xi_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\xi_3=3i\,\xi_1-2\xi_2\\(2+6i)\xi_1+(-4+3i)\,\xi_2=0\\\xi_1-2\xi_2+3i\,\xi_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\xi_3=3i\,\xi_1-2\xi_2\\\xi_1=\dfrac{4-3i}{2+6i}\xi_2\\\xi_1-2\xi_2+3i\,\xi_3=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\xi_3=\dfrac{12i-9i^2}{2+6i}\xi_2-2\xi_2\\\xi_1=\dfrac{4-3i}{2+6i}\xi_2\\\xi_1-2\xi_2+3i\,\xi_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\xi_3=\dfrac{9+12i-4-12i}{2+6i}\xi_2\\\xi_1=\dfrac{4-3i}{2+6i}\xi_2\\\xi_1-2\xi_2+3i\,\xi_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\xi_3=\dfrac{5}{2+6i}\xi_2\\\xi_1=\dfrac{4-3i}{2+6i}\xi_2\\\xi_1-2\xi_2+3i\,\xi_3=0\end{cases}$$

одакле следи

$$\begin{cases}\xi_3=\dfrac{5}{2+6i}\xi_2\\\xi_1=\dfrac{4-3i}{2+6i}\xi_2\\\dfrac{4-3i}{2+6i}\xi_2-2\xi_2+\dfrac{15i}{2+6i}\xi_2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\xi_3=\dfrac{5}{2+6i}\xi_2\\\xi_1=\dfrac{4-3i}{2+6i}\xi_2\\\dfrac{4-3i-4-12i+15i}{2+6i}\xi_2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\xi_3=\dfrac{5}{2+6i}\xi_2\\\xi_1=\dfrac{4-3i}{2+6i}\xi_2\\\dfrac{4+4+15i-15i}{2+6i}\xi_2=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\xi_3=\dfrac{5}{2+6i}\xi_2\\\xi_1=\dfrac{4-3i}{2+6i}\xi_2\\0\cdot\xi_2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\xi_3=\dfrac{5}{2+6i}\xi_2\\\xi_1=\dfrac{4-3i}{2+6i}\xi_2\\\xi_2\in\mathbb{C}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\xi_1=\dfrac{4-3i}{2+6i}\xi_2\\\xi_2\in\mathbb{C}\\\xi_3=\dfrac{5}{2+6i}\xi_2\end{cases}$$

Како добијене компоненте трећег својственог вектора не смеју све бити једнаке нули, то се бира да је $\xi_2=2+6i$, а онда су $\xi_1=4-3i$ и $\xi_3=5$; трећи својствени вектор, који одговара трећој својственој вредности $\lambda_3=3i$, може се записати као матрица-колона

$$\left[|v_3\rangle\right]_{\{|v_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 4-3i \\ 2+6i \\ 5 \end{bmatrix}$$

или као уређена тројка

$$|v_3\rangle = (4-3i, 2+6i, 5)\ .$$

Да би се могла добити *спектрална форма*, неопходно је да добијена три својствена вектора

$$\left\{|v_1\rangle = (4+3i, 2-6i, 5), |v_2\rangle = (2,1,-2), |v_3\rangle = (4-3i, 2+6i, 5)\right\}$$

буду Грам-Шмитовим поступком ортонормирани.

Пошто су добијени својствени вектори већ *ортогонални* међусобно

$$\begin{aligned}\langle v_1|v_2\rangle &= \langle (4+3i, 2-6i, 5)|(2,1,-2)\rangle = \sqrt{(4+3i)^*\cdot 2+(2-6i)^*\cdot 1+5\cdot(-2)} \\ &= \sqrt{(4-3i)\cdot 2+(2+6i)-10} = \sqrt{8-6i+2+6i-10} = \sqrt{8+2-10-6i+6i} = \sqrt{0} = 0\end{aligned},$$

$$\begin{aligned}\langle v_3|v_2\rangle &= \langle (4-3i, 2+6i, 5)|(2,1,-2)\rangle = \sqrt{(4-3i)^*\cdot 2+(2+6i)^*\cdot 1+5\cdot(-2)} \\ &= \sqrt{(4+3i)\cdot 2+(2-6i)-10} = \sqrt{8+6i+2-6i-10} = \sqrt{8+2-10+6i-6i} = \sqrt{0} = 0\end{aligned},$$

$$\begin{aligned}\langle v_1|v_3\rangle &= \langle (4+3i, 2-6i, 5)|(4-3i, 2+6i, 5)\rangle = \sqrt{(4+3i)^*(4-3i)+(2-6i)^*(2+6i)+5^*\cdot 5} \\ &= \sqrt{(4-3i)(4-3i)+(2+6i)(2+6i)+25} = \sqrt{(16-12i-12i+9i^2)+(4+12i+12i+36i^2)+25} \\ &= \sqrt{16-24i-9+4+24i-36+25} = \sqrt{16-9+4-36+25+24i-24i} = \sqrt{45-45+24i-24i} = \sqrt{0} = 0\end{aligned}$$

довољно их је *нормирати*, односно поделити сваки од њих са својом нормом

$$\begin{aligned}|v_1\rangle^{\text{norm}} &= \frac{|v_1\rangle}{\||v_1\rangle\|} = \frac{|v_1\rangle}{\sqrt{\langle v_1|v_1\rangle}} = \frac{(4+3i, 2-6i, 5)}{\sqrt{\langle (4+3i, 2-6i, 5)|(4+3i, 2-6i, 5)\rangle}} \\ &= \frac{(4+3i, 2-6i, 5)}{\sqrt{(4+3i)^*(4+3i)+(2-6i)^*(2-6i)+5^*\cdot 5}} \\ &= \frac{(4+3i, 2-6i, 5)}{\sqrt{(4-3i)(4+3i)+(2+6i)(2-6i)+25}} = \frac{(4+3i, 2-6i, 5)}{\sqrt{4^2-(3i)^2+2^2-(6i)^2+25}} \\ &= \frac{(4+3i, 2-6i, 5)}{\sqrt{16-9i^2+4-36i^2+25}} = \frac{(4+3i, 2-6i, 5)}{\sqrt{16+9+4+36+25}} = \frac{(4+3i, 2-6i, 5)}{\sqrt{25+40+25}} = \frac{(4+3i, 2-6i, 5)}{\sqrt{90}} \\ &= \frac{(4+3i, 2-6i, 5)}{\sqrt{9\cdot 10}} = \frac{(4+3i, 2-6i, 5)}{\sqrt{9}\sqrt{10}} = \frac{1}{3\sqrt{10}}(4+3i, 2-6i, 5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|v_2\rangle^{\text{norm}} &= \frac{|v_2\rangle}{\||v_2\rangle\|} = \frac{|v_2\rangle}{\sqrt{\langle v_2|v_2\rangle}} = \frac{(2,1,-2)}{\sqrt{\langle (2,1,-2)|(2,1,-2)\rangle}} \\ &= \frac{(2,1,-2)}{\sqrt{2^*\cdot 2+1^*\cdot 1+(-2)^*\cdot(-2)}} = \frac{(2,1,-2)}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = \frac{(2,1,-2)}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{(2,1,-2)}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}(2,1,-2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|v_3\rangle^{\text{norm}} &= \frac{|v_3\rangle}{\||v_3\rangle\|} = \frac{|v_3\rangle}{\sqrt{\langle v_3|v_3\rangle}} = \frac{(4-3i,2+6i,5)}{\sqrt{\langle(4-3i,2+6i,5)|(4-3i,2+6i,5)\rangle}} \\
&= \frac{(4-3i,2+6i,5)}{\sqrt{(4-3i)^*(4-3i)+(2+6i)^*(2+6i)+5^*\cdot 5}} \\
&= \frac{(4-3i,2+6i,5)}{\sqrt{(4+3i)(4-3i)+(2-6i)(2+6i)+25}} = \frac{(4-3i,2+6i,5)}{\sqrt{4^2-(3i)^2+2^2-(6i)^2+25}} \\
&= \frac{(4-3i,2+6i,5)}{\sqrt{16-9i^2+4-36i^2+25}} = \frac{(4-3i,2+6i,5)}{\sqrt{16+9+4+36+25}} = \frac{(4-3i,2+6i,5)}{\sqrt{25+40+25}} = \frac{(4-3i,2+6i,5)}{\sqrt{90}} \\
&= \frac{(4-3i,2+6i,5)}{\sqrt{9\cdot 10}} = \frac{(4-3i,2+6i,5)}{\sqrt{9}\sqrt{10}} = \frac{1}{3\sqrt{10}}(4-3i,2+6i,5)
\end{aligned}$$

те је тако добијен потребни ортонормирани својствени базис

$$\left\{|v_1\rangle = \frac{1}{3\sqrt{10}}(4+3i,2-6i,5), |v_2\rangle = \frac{1}{3}(2,1,-2), |v_3\rangle = \frac{1}{3\sqrt{10}}(4-3i,2+6i,5)\right\}$$

или, записано у облику матрица-колона (због изоморфизма векторског простора матрица и векторског простора уређених парова)

$$\left\{|v_1\rangle^{\text{norm}} \to \frac{1}{3\sqrt{10}}\begin{bmatrix}4+3i\\2-6i\\5\end{bmatrix}, |v_2\rangle^{\text{norm}} \to \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\1\\-2\end{bmatrix}, |v_3\rangle^{\text{norm}} \to \frac{1}{3\sqrt{10}}\begin{bmatrix}4-3i\\2+6i\\5\end{bmatrix}\right\}.$$

Сада се најзад може извести *спектрална форма* задате матрице, као линеарна комбинација пројектора на одговарајуће једнодимензионалне својствене потпросторе

$$\hat{C} = \sum_{i=1}^{3}\lambda_i\hat{P}_{\lambda_i} = \lambda_1\hat{P}_{\lambda_1} + \lambda_2\hat{P}_{\lambda_2} + \lambda_3\hat{P}_{\lambda_3} = \lambda_1|v_1\rangle^{\text{norm}}\,{}^{\text{norm}}\langle v_1| + \lambda_2|v_2\rangle^{\text{norm}}\,{}^{\text{norm}}\langle v_2| + \lambda_3|v_3\rangle^{\text{norm}}\,{}^{\text{norm}}\langle v_3|$$

наравно, написана у матричном простору као линеарна комбинација одговарајућих матрица-колона и матрица-врста

$$\begin{aligned}
\mathscr{C}_{\text{spektr}} &= (-3i)\frac{1}{3\sqrt{10}}\begin{bmatrix}4+3i\\2-6i\\5\end{bmatrix}\frac{1}{3\sqrt{10}}\begin{bmatrix}4+3i\\2-6i\\5\end{bmatrix}^{\dagger} + 0\cdot\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\1\\-2\end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\1\\-2\end{bmatrix}^{\dagger} + 3i\frac{1}{3\sqrt{10}}\begin{bmatrix}4-3i\\2+6i\\5\end{bmatrix}\frac{1}{3\sqrt{10}}\begin{bmatrix}4-3i\\2+6i\\5\end{bmatrix}^{\dagger} \\
&= -\frac{i}{30}\begin{bmatrix}4+3i\\2-6i\\5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(4+3i)^* & (2-6i)^* & 5^*\end{bmatrix} + \frac{i}{30}\begin{bmatrix}4-3i\\2+6i\\5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(4-3i)^* & (2+6i)^* & 5^*\end{bmatrix} \\
&= -\frac{i}{30}\begin{bmatrix}4+3i\\2-6i\\5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4-3i & 2+6i & 5\end{bmatrix} + \frac{i}{30}\begin{bmatrix}4-3i\\2+6i\\5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4+3i & 2-6i & 5\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

или

$$\mathscr{C}_{\text{spektr}} = -\frac{i}{30}\begin{bmatrix} (4+3i)(4-3i) & (4+3i)(2+6i) & (4+3i)5 \\ (2-6i)(4-3i) & (2-6i)(2+6i) & (2-6i)5 \\ 5(4-3i) & 5(2+6i) & 5\cdot 5 \end{bmatrix}$$

$$+\frac{i}{30}\begin{bmatrix} (4-3i)(4+3i) & (4-3i)(2-6i) & (4-3i)5 \\ (2+6i)(4+3i) & (2+6i)(2-6i) & (2+6i)5 \\ 5(4+3i) & 5(2-6i) & 5\cdot 5 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{i}{30}\begin{bmatrix} 4^2-3^2i^2 & 8+6i+24i+18i^2 & 20+15i \\ 8-24i-6i+18i^2 & 2^2-6^2i^2 & 10-30i \\ 20-15i & 10+30i & 25 \end{bmatrix}$$

$$+\frac{i}{30}\begin{bmatrix} 4^2-3^2i^2 & 8-6i-24i+18i^2 & 20-15i \\ 8+24i+6i+18i^2 & 2^2-6^2i^2 & 10+30i \\ 20+15i & 10-30i & 25 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{i}{30}\left(\begin{bmatrix} 25 & -10-30i & 20-15i \\ -10+30i & 40 & 10+30i \\ 20+15i & 10-30i & 25 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 25 & -10+30i & 20+15i \\ -10-30i & 40 & 10-30i \\ 20-15i & 10+30i & 25 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{i}{30}\left(\begin{bmatrix} 25 & -10-30i & 20-15i \\ -10+30i & 40 & 10+30i \\ 20+15i & 10-30i & 25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -25 & 10-30i & -20-15i \\ 10+30i & -40 & -10+30i \\ -20+15i & -10-30i & -25 \end{bmatrix}\right)$$

Провера тачности спектралне форме врши се сабирањем квадратних матрица а потом њиховим множењем

$$\mathscr{C}_{\text{spektr}} = \frac{i}{30}\begin{bmatrix} 25-25 & -10-30i+10-30i & 20-15i-20-15i \\ -10+30i+10+30i & 40-40 & 10+30i-10+30i \\ 20+15i-20+15i & 10-30i-10-30i & 25-25 \end{bmatrix}$$

то јест

$$\mathscr{C}_{\text{spektr}} = \frac{i}{30}\begin{bmatrix} 0 & -60i & -30i \\ 60i & 0 & 60i \\ 30i & -60i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -60i\dfrac{i}{30} & -30i\dfrac{i}{30} \\ 60i\dfrac{i}{30} & 0 & 60i\dfrac{i}{30} \\ 30i\dfrac{i}{30} & -60i\dfrac{i}{30} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2i^2 & -i^2 \\ 2i^2 & 0 & 2i^2 \\ i^2 & -2i^2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

чиме се добија, управо како и треба, баш полазна, задата матрица $\mathscr{C}$.

Унитарни оператор, односно матрица којом се он представља у матричном простору, добија се уједињавањем компоненти сва три својствена вектора

$$\left\{ |v_1\rangle^{\text{norm}} \to \frac{1}{3\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 4+3i \\ 2-6i \\ 5 \end{bmatrix}, |v_2\rangle^{\text{norm}} \to \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, |v_3\rangle^{\text{norm}} \to \frac{1}{3\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 4-3i \\ 2+6i \\ 5 \end{bmatrix} \right\},$$

при чему предматрични коефицијент мора бити једнак за сва три својствена вектора

$$\left\{ |v_1\rangle^{\text{norm}} \to \frac{1}{3\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 4+3i \\ 2-6i \\ 5 \end{bmatrix}, |v_2\rangle^{\text{norm}} \to \frac{1}{3\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 2\sqrt{10} \\ \sqrt{10} \\ -2\sqrt{10} \end{bmatrix}, |v_3\rangle^{\text{norm}} \to \frac{1}{3\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 4-3i \\ 2+6i \\ 5 \end{bmatrix} \right\},$$

на следећи начин

$$\mathscr{U} = \left[|v_1\rangle^{\text{norm}} \middle| |v_2\rangle^{\text{norm}} \middle| |v_3\rangle^{\text{norm}} \right] = \frac{1}{3\sqrt{10}}\left[\begin{array}{c|c|c} 4+3i & 2\sqrt{10} & 4-3i \\ 2-6i & \sqrt{10} & 2+6i \\ 5 & -2\sqrt{10} & 5 \end{array}\right] = \frac{1}{3\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 4+3i & 2\sqrt{10} & 4-3i \\ 2-6i & \sqrt{10} & 2+6i \\ 5 & -2\sqrt{10} & 5 \end{bmatrix}.$$

Потребан је и оператор адјунгован добијеном, који се добија транспоновањем његових врста и колона, уз комплексно коњуговање комплексних матричних елемената

$$\mathscr{U}^{\dagger} = \frac{1}{3\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 4+3i & 2\sqrt{10} & 4-3i \\ 2-6i & \sqrt{10} & 2+6i \\ 5 & -2\sqrt{10} & 5 \end{bmatrix}^{\dagger} = \frac{1}{3\sqrt{10}}\begin{bmatrix} (4+3i)^* & (2-6i)^* & 5 \\ 2\sqrt{10} & \sqrt{10} & -2\sqrt{10} \\ (4-3i)^* & (2+6i)^* & 5 \end{bmatrix},$$

односно

$$\mathscr{U}^{\dagger} = \frac{1}{3\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 4-3i & 2+6i & 5 \\ 2\sqrt{10} & \sqrt{10} & -2\sqrt{10} \\ 4+3i & 2-6i & 5 \end{bmatrix}.$$

Сада се може проверити формула за трансформацију сличности

$$\mathscr{C}_{\text{dij}} = \mathscr{U}^{\dagger}\mathscr{C}\,\mathscr{U}$$

на следећи начин

$$\mathscr{U}^{\dagger}\mathscr{C}\,\mathscr{U} = \frac{1}{3\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 4-3i & 2+6i & 5 \\ 2\sqrt{10} & \sqrt{10} & -2\sqrt{10} \\ 4+3i & 2-6i & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{3\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 4+3i & 2\sqrt{10} & 4-3i \\ 2-6i & \sqrt{10} & 2+6i \\ 5 & -2\sqrt{10} & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{90}\begin{bmatrix} 4-3i & 2+6i & 5 \\ 2\sqrt{10} & \sqrt{10} & -2\sqrt{10} \\ 4+3i & 2-6i & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4+3i & 2\sqrt{10} & 4-3i \\ 2-6i & \sqrt{10} & 2+6i \\ 5 & -2\sqrt{10} & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{90}\begin{bmatrix} 4-3i & 2+6i & 5 \\ 2\sqrt{10} & \sqrt{10} & -2\sqrt{10} \\ 4+3i & 2-6i & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9-12i & 0 & 9+12i \\ -18-6i & 0 & -18+6i \\ -15i & 0 & 15i \end{bmatrix}$$

или

$$\mathscr{U}^{\dagger}\mathscr{C}\mathscr{U}=\frac{1}{90}\begin{bmatrix}4-3i & 2+6i & 5\\ 2\sqrt{10} & \sqrt{10} & -2\sqrt{10}\\ 4+3i & 2-6i & 5\end{bmatrix}3\begin{bmatrix}3-4i & 0 & 3+4i\\ -6-2i & 0 & -6+2i\\ -5i & 0 & 5i\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{30}\begin{bmatrix}(4-3i)(3-4i)+(2+6i)(-6-2i)+5\cdot(-5i) & 0 & (4-3i)(3+4i)+(2+6i)(-6+2i)+5\cdot(5i)\\ 2\sqrt{10}(3-4i)+\sqrt{10}(-6-2i)+(-2\sqrt{10})\cdot(-5i) & 0 & 2\sqrt{10}(3+4i)+\sqrt{10}(-6+2i)+(-2\sqrt{10})\cdot(5i)\\ (4+3i)(3-4i)+(2-6i)(-6-2i)+5\cdot(-5i) & 0 & (4+3i)(3+4i)+(2-6i)(-6+2i)+5\cdot(5i)\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{30}\begin{bmatrix}12-9i-16i+12i^2-12-36i-4i-12i^2-25i & 0 & 12-9i+16i-12i^2-12-36i+4i+12i^2+25i\\ 6\sqrt{10}-8i\sqrt{10}-6\sqrt{10}-2i\sqrt{10}+10i\sqrt{10} & 0 & 6\sqrt{10}+8i\sqrt{10}-6\sqrt{10}+2i\sqrt{10}-10i\sqrt{10}\\ 12+9i-16i-12i^2-12+36i-4i+12i^2-25i & 0 & 12+9i+16i+12i^2-12+36i+4i-12i^2+25i\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{30}\begin{bmatrix}12-9i-16i-12-12-36i-4i+12-25i & 0 & 12-9i+16i+12-12-36i+4i-12+25i\\ 6\sqrt{10}-6\sqrt{10}-10i\sqrt{10}+10i\sqrt{10} & 0 & 6\sqrt{10}-6\sqrt{10}+10i\sqrt{10}-10i\sqrt{10}\\ 12+9i-16i+12-12+36i-4i-12-25i & 0 & 12+9i+16i-12-12+36i+4i+12+25i\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{30}\begin{bmatrix}-90i & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 90i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3i & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3i\end{bmatrix}=\mathscr{C}_{\text{dij}}$$

чиме је трансформација сличности потврђена.

(г) Својствени проблем оператора који одговара четвртој матрици

$$\hat{D}|v\rangle=\lambda|v\rangle$$

написан у матричном облику гласи

$$\mathscr{D}\xi=\lambda\xi$$

односно

$$\begin{bmatrix}2-i & -1 & 0\\ -1 & 1-i & 1\\ 0 & 1 & 2-i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{bmatrix}$$

илити

$$\begin{bmatrix}2-i-\lambda & -1 & 0\\ -1 & 1-i-\lambda & 1\\ 0 & 1 & 2-i-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}.$$

Да решење својственог проблема не би било тривијално, матрица ξ мора имати барем једну компоненту различиту од нуле, а то значи да детерминанта задате матрице мора бити једнака нули

$$\begin{vmatrix}2-i-\lambda & -1 & 0\\ -1 & 1-i-\lambda & 1\\ 0 & 1 & 2-i-\lambda\end{vmatrix}=0.$$

Решавањем овог израза

$$(2-i-\lambda)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1-i-\lambda & 1\\ 1 & 2-i-\lambda\end{vmatrix}+(-1)\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2-i-\lambda\end{vmatrix}+0\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-1 & 1-i-\lambda\\ 0 & 1\end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow\ (2-i-\lambda)\begin{vmatrix}1-i-\lambda & 1\\ 1 & 2-i-\lambda\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2-i-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow\ (2-i-\lambda)\left[(1-i-\lambda)(2-i-\lambda)-1\cdot 1\right]+\left[(-1)(2-i-\lambda)-0\cdot 1\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\ (2-i-\lambda)(1-i-\lambda)(2-i-\lambda)-(2-i-\lambda)-(2-i-\lambda)=0$$

$$\Leftrightarrow\ (2-i-\lambda)\left[(1-i-\lambda)(2-i-\lambda)-1-1\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\ (2-i-\lambda)(2-i-\lambda-2i+i^2+i\lambda-2\lambda+i\lambda+\lambda^2-2)=0$$

$$\Leftrightarrow\ (2-i-\lambda)(\lambda^2-3\lambda-1-3i+2i\lambda)=0$$

$$\Leftrightarrow\ (2-i-\lambda)\left[\lambda^2+(-3+2i)\lambda-(1+3i)\right]=0$$

$$\Rightarrow\ \underline{\begin{cases}2-i-\lambda=0\\ \lambda^2+(-3+2i)\lambda-(1+3i)=0\end{cases}}\ \Rightarrow\ \underline{\begin{cases}\lambda_2=2-i\\ \lambda_{1,3}=\dfrac{-(-3+2i)\pm\sqrt{(-3+2i)^2+4(1+3i)}}{2}\end{cases}}$$

$$\Leftrightarrow\ \underline{\begin{cases}\lambda_2=2-i\\ \lambda_{1,3}=\dfrac{(3-2i)\pm\sqrt{9-12i+4i^2+4+12i}}{2}\end{cases}}\ \Leftrightarrow\ \underline{\begin{cases}\lambda_2=2-i\\ \lambda_{1,3}=\dfrac{(3-2i)\pm\sqrt{9-4+4-12i+12i}}{2}\end{cases}}$$

$$\Leftrightarrow\ \underline{\begin{cases}\lambda_2=2-i\\ \lambda_{1,3}=\dfrac{(3-2i)\pm\sqrt{9}}{2}\end{cases}}\ \Leftrightarrow\ \underline{\begin{cases}\lambda_2=2-i\\ \lambda_{1,3}=\dfrac{3-2i\pm 3}{2}\end{cases}}\ \Leftrightarrow\ \underline{\begin{cases}\lambda_2=2-i\\ \lambda_1=\dfrac{3-2i-3}{2}\\ \lambda_3=\dfrac{3-2i+3}{2}\end{cases}}\ \Leftrightarrow\ \underline{\begin{cases}\lambda_2=2-i\\ \lambda_1=\dfrac{-2i}{2}\\ \lambda_3=\dfrac{6-2i}{2}\end{cases}}\ \Leftrightarrow\ \underline{\begin{cases}\lambda_2=2-i\\ \lambda_1=-i\\ \lambda_3=3-i\end{cases}}$$

добијају се три различите својствене вредности матрице $\mathscr{D}$

$$\lambda_1=-i\,,\ \lambda_2=2-i\ \text{ и }\ \lambda_3=3-i$$

којима одговарају три својствене једначине

$$\underline{\begin{cases}\hat{D}|v_1\rangle=\lambda_1|v_1\rangle=(-i)|v_1\rangle\\ \hat{D}|v_2\rangle=\lambda_2|v_2\rangle=(2-i)|v_2\rangle\\ \hat{D}|v_3\rangle=\lambda_3|v_3\rangle=(3-i)|v_3\rangle\end{cases}}$$

које, написане у облику који одговара основној формули репрезентовања

$$\underline{\begin{cases}\hat{D}|v_1\rangle=(-i)|v_1\rangle+0|v_2\rangle+0|v_3\rangle\\ \hat{D}|v_2\rangle=0|v_1\rangle+(2-i)|v_2\rangle+0|v_3\rangle\\ \hat{D}|v_3\rangle=0|v_1\rangle+0|v_2\rangle+(3-i)|v_3\rangle\end{cases}}$$

дају *дијагоналну форму* матрице, тј. матрицу оператора $\hat{D}$ у његовом својственом базису

$$\mathscr{D}_{\text{dij}} = \left[\hat{D}\right]_{\{|v_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & 2-i & 0 \\ 0 & 0 & 3-i \end{bmatrix}.$$

Као и увек, матричним изразом

$$\begin{bmatrix} 2-i-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 1-i-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-i-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

на једноставнији начин записан је систем једначина

$$\begin{cases} (2-i-\lambda)\xi_1 - \xi_2 = 0 \\ -\xi_1 + (1-i-\lambda)\xi_2 + \xi_3 = 0 \\ \xi_2 + (2-i-\lambda)\xi_3 = 0 \end{cases}$$

Заменом прве својствене вредности $\lambda_1 = -i$ у горњи систем следи

$$\begin{cases} (2-i-\lambda_1)\xi_1 - \xi_2 = 0 \\ -\xi_1 + (1-i-\lambda_1)\xi_2 + \xi_3 = 0 \\ \xi_2 + (2-i-\lambda_1)\xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2-i+i)\xi_1 - \xi_2 = 0 \\ -\xi_1 + (1-i+i)\xi_2 + \xi_3 = 0 \\ \xi_2 + (2-i+i)\xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\xi_1 - \xi_2 = 0 \\ -\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0 \\ \xi_2 + 2\xi_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\xi_1 - \xi_2 = 0 \\ -\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0 \\ \xi_2 = -2\xi_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\xi_1 + 2\xi_3 = 0 \\ -\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0 \\ \xi_2 = -2\xi_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 + \xi_3 = 0 \\ -\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0 \\ \xi_2 = -2\xi_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = -\xi_3 \\ -\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0 \\ \xi_2 = -2\xi_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \xi_1 = -\xi_3 \\ \xi_3 - 2\xi_3 + \xi_3 = 0 \\ \xi_2 = -2\xi_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = -\xi_3 \\ (1-2+1)\xi_3 = 0 \\ \xi_2 = -2\xi_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = -\xi_3 \\ 0\cdot\xi_3 = 0 \\ \xi_2 = -2\xi_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = -\xi_3 \\ \xi_3 \in \mathbb{R} \\ \xi_2 = -2\xi_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = -\xi_3 \\ \xi_2 = -2\xi_3 \\ \xi_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Како добијене компоненте првог својственог вектора не смеју све бити једнаке нули, то се бира да је $\xi_3 = -1$, а онда су $\xi_1 = 1$ и $\xi_2 = 2$; први својствени вектор, који одговара првој својственој вредности $\lambda_1 = -i$, може се записати као матрица-колона

$$\left[|v_1\rangle\right]_{\{|v_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

или као уређена тројка

$$|v_1\rangle = (1, 2, -1)\,.$$

Након замене друге својствене вредности $\lambda_2 = 2-i$ у систем једначина следи

$$\begin{cases}(2-i-\lambda_2)\xi_1-\xi_2=0\\ -\xi_1+(1-i-\lambda_2)\xi_2+\xi_3=0\\ \xi_2+(2-i-\lambda_2)\xi_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(2-i-2+i)\xi_1-\xi_2=0\\ -\xi_1+(1-i-2+i)\xi_2+\xi_3=0\\ \xi_2+(2-i-2+i)\xi_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0\cdot\xi_1-\xi_2=0\\ -\xi_1-\xi_2+\xi_3=0\\ \xi_2+0\cdot\xi_3=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\xi_2=0\\ -\xi_1-\xi_2+\xi_3=0\\ \xi_2=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\xi_2=0\\ -\xi_1+\xi_3=0\\ \xi_2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\xi_2=0\\ \xi_3=\xi_1\\ \xi_2=0\end{cases}$$

Да би се избегло добијање нултог вектора, бира се да је $\xi_1=1$, одакле следи да је $\xi_3=1$. То значи да се други својствени вектор, који одговара другој својственој вредности $\lambda_2=2-i$, може представити било као матрица-колона

$$\left[|v_2\rangle\right]_{\{|v_i\rangle\}} = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

било као уређена тројка

$$|v_2\rangle=(1,0,1)\,.$$

На крају се замени трећа својствена вредност $\lambda_3=3-i$ у поменути систем, те се добија

$$\begin{cases}(2-i-\lambda_3)\xi_1-\xi_2=0\\ -\xi_1+(1-i-\lambda_3)\xi_2+\xi_3=0\\ \xi_2+(2-i-\lambda_3)\xi_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(2-i-3+i)\xi_1-\xi_2=0\\ -\xi_1+(1-i-3+i)\xi_2+\xi_3=0\\ \xi_2+(2-i-3+i)\xi_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-\xi_1-\xi_2=0\\ -\xi_1-2\xi_2+\xi_3=0\\ \xi_2-\xi_3=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\xi_1=-\xi_2\\ -\xi_1-2\xi_2+\xi_3=0\\ \xi_3=\xi_2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\xi_1=-\xi_2\\ \xi_2-2\xi_2+\xi_2=0\\ \xi_3=\xi_2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\xi_1=-\xi_2\\ (1-2+1)\xi_2=0\\ \xi_3=\xi_2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\xi_1=-\xi_2\\ 0\cdot\xi_2=0\\ \xi_3=\xi_2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\xi_1=-\xi_2\\ \xi_2\in\mathbb{R}\\ \xi_3=\xi_2\end{cases}$$

Ради избегавања нултог вектора, бира се да је $\xi_2=1$, те су онда $\xi_1=-1$ и $\xi_3=1$.

Значи да се трећи својствени вектор, који одговара трећој својственој вредности $\lambda_3=3-i$, може записати као матрица-колона

$$\left[|v_3\rangle\right]_{\{|v_i\rangle\}} = \begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$$

или као уређена тројка

$$|v_3\rangle=(-1,1,1)\,.$$

Да би се могла добити *спектрална форма*, неопходно је да добијена три својствена вектора

$$\left\{|v_1\rangle=(1,2,-1),|v_2\rangle=(1,0,1),|v_3\rangle=(-1,1,1)\right\}$$

буду Грам-Шмитовим поступком ортонормирани.

Пошто су добијени својствени вектори већ *ортогонални* међусобно

$$\langle v_1 | v_2 \rangle = \langle (1,2,-1) | (1,0,1) \rangle = \sqrt{1^* \cdot 1 + 2^* \cdot 0 + (-1)^* \cdot 1} = \sqrt{1-1} = \sqrt{0} = 0 ,$$

$$\langle v_1 | v_3 \rangle = \langle (1,2,-1) | (-1,1,1) \rangle = \sqrt{1^* \cdot (-1) + 2^* \cdot 1 + (-1)^* \cdot 1} = \sqrt{-1+2-1} = \sqrt{0} = 0 ,$$

$$\langle v_2 | v_3 \rangle = \langle (1,0,1) | (-1,1,1) \rangle = \sqrt{1^* \cdot (-1) + 0^* \cdot 1 + 1 \cdot 1} = \sqrt{-1+1} = \sqrt{0} = 0$$

довољно их је *нормирати*, односно поделити сваки од њих са својом нормом

$$\begin{aligned} |v_1\rangle^{\text{norm}} &= \frac{|v_1\rangle}{\||v_1\rangle\|} = \frac{|v_1\rangle}{\sqrt{\langle v_1 | v_1 \rangle}} = \frac{(1,2,-1)}{\sqrt{\langle (1,2,-1) | (1,2,-1) \rangle}} \\ &= \frac{(1,2,-1)}{\sqrt{1^* \cdot 1 + 2^* \cdot 2 + (-1)^* \cdot (-1)}} = \frac{(1,2,-1)}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1) \end{aligned},$$

$$\begin{aligned} |v_2\rangle^{\text{norm}} &= \frac{|v_2\rangle}{\||v_2\rangle\|} = \frac{|v_2\rangle}{\sqrt{\langle v_2 | v_2 \rangle}} = \frac{(1,0,1)}{\sqrt{\langle (1,0,1) | (1,0,1) \rangle}} \\ &= \frac{(1,0,1)}{\sqrt{1^* \cdot 1 + 0^* \cdot 0 + 1^* \cdot 1}} = \frac{(1,0,1)}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1) \end{aligned},$$

$$\begin{aligned} |v_3\rangle^{\text{norm}} &= \frac{|v_3\rangle}{\||v_3\rangle\|} = \frac{|v_3\rangle}{\sqrt{\langle v_3 | v_3 \rangle}} = \frac{(-1,1,1)}{\sqrt{\langle (-1,1,1) | (-1,1,1) \rangle}} \\ &= \frac{(-1,1,1)}{\sqrt{(-1)^* \cdot (-1) + 1^* \cdot 1 + 1^* \cdot 1}} = \frac{(-1,1,1)}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1) \end{aligned}$$

те је тако добијен потребни ортонормирани својствени базис

$$\left\{ |v_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1), |v_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1), |v_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1) \right\}$$

или, записано у облику матрица-колона (због изоморфизма векторског простора матрица и векторског простора уређених парова)

$$\left\{ |v_1\rangle^{\text{norm}} \to \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, |v_2\rangle^{\text{norm}} \to \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, |v_3\rangle^{\text{norm}} \to \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Сада се најзад може извести *спектрална форма* задате матрице, као линеарна комбинација пројектора на одговарајуће једнодимензионалне својствене потпросторе

$$\hat{D} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \hat{P}_{\lambda_i} = \lambda_1 \hat{P}_{\lambda_1} + \lambda_2 \hat{P}_{\lambda_2} + \lambda_3 \hat{P}_{\lambda_3} = \lambda_1 |v_1\rangle^{\text{norm}}\, {}^{\text{norm}}\langle v_1 | + \lambda_2 |v_2\rangle^{\text{norm}}\, {}^{\text{norm}}\langle v_2 | + \lambda_3 |v_3\rangle^{\text{norm}}\, {}^{\text{norm}}\langle v_3 |$$

наравно, написана у матричном простору као линеарна комбинација одговарајућих матрица-колона и матрица-врста

$$\mathscr{D}_{\text{spektr}} = (-i)\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}^{\dagger} + (2-i)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}^{\dagger} + (3-i)\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}^{\dagger}$$

$$= -\frac{i}{6}\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\end{bmatrix} + \frac{2-i}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix} + \frac{3-i}{3}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$= -\frac{i}{6}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\2 & 4 & -2\\-1 & -2 & 1\end{bmatrix} + \frac{2-i}{2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\\1 & 0 & 1\end{bmatrix} + \frac{3-i}{3}\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\-1 & 1 & 1\\-1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

Провера тачности спектралне форме врши се множењем скаларима квадратних матрица а потом њиховим матричним сабирањем

$$\mathscr{D}_{\text{spektr}} = -\frac{i}{6}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\2 & 4 & -2\\-1 & -2 & 1\end{bmatrix} + \frac{2-i}{2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\\1 & 0 & 1\end{bmatrix} + \frac{3-i}{3}\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\-1 & 1 & 1\\-1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}-\frac{i}{6} & -\frac{i}{6}2 & -\frac{i}{6}(-1)\\ -\frac{i}{6}2 & -\frac{i}{6}4 & -\frac{i}{6}(-2)\\ -\frac{i}{6}(-1) & -\frac{i}{6}(-2) & -\frac{i}{6}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\frac{2-i}{2} & 0 & \frac{2-i}{2}\\ 0 & 0 & 0\\ \frac{2-i}{2} & 0 & \frac{2-i}{2}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\frac{3-i}{3} & \frac{3-i}{3}(-1) & \frac{3-i}{3}(-1)\\ \frac{3-i}{3}(-1) & \frac{3-i}{3} & \frac{3-i}{3}\\ \frac{3-i}{3}(-1) & \frac{3-i}{3} & \frac{3-i}{3}\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}-\frac{i}{6} & -\frac{i}{3} & \frac{i}{6}\\ -\frac{i}{3} & -\frac{2i}{3} & \frac{i}{3}\\ \frac{i}{6} & \frac{i}{3} & -\frac{i}{6}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1-\frac{i}{2} & 0 & 1-\frac{i}{2}\\ 0 & 0 & 0\\ 1-\frac{i}{2} & 0 & 1-\frac{i}{2}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1-\frac{i}{3} & \frac{i}{3}-1 & \frac{i}{3}-1\\ \frac{i}{3}-1 & 1-\frac{i}{3} & 1-\frac{i}{3}\\ \frac{i}{3}-1 & 1-\frac{i}{3} & 1-\frac{i}{3}\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}-\frac{i}{6}+1-\frac{i}{2}+1-\frac{i}{3} & -\frac{i}{3}+\frac{i}{3}-1 & \frac{i}{6}+1-\frac{i}{2}+\frac{i}{3}-1\\ -\frac{i}{3}+\frac{i}{3}-1 & -\frac{2i}{3}+1-\frac{i}{3} & \frac{i}{3}+1-\frac{i}{3}\\ \frac{i}{6}+1-\frac{i}{2}+\frac{i}{3}-1 & \frac{i}{3}+1-\frac{i}{3} & -\frac{i}{6}+1-\frac{i}{2}+1-\frac{i}{3}\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}2-\frac{i}{6}-\frac{i}{2}-\frac{i}{3} & -1 & \frac{i}{6}-\frac{i}{2}+\frac{i}{3}\\ -1 & 1-\frac{2i}{3}-\frac{i}{3} & 1\\ \frac{i}{6}-\frac{i}{2}+\frac{i}{3} & 1 & 2-\frac{i}{6}-\frac{i}{2}-\frac{i}{3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2-\frac{i}{6}-\frac{3i}{6}-\frac{2i}{6} & -1 & \frac{i}{6}-\frac{3i}{6}+\frac{2i}{6}\\ -1 & 1-\frac{3i}{3} & 1\\ \frac{i}{6}-\frac{3i}{6}+\frac{2i}{6} & 1 & 2-\frac{i}{6}-\frac{3i}{6}-\frac{2i}{6}\end{bmatrix}$$

што даје израз за дијагоналну форму у облику

$$\mathscr{D}_{\text{spektr}}=\begin{bmatrix}2-i & -1 & 0\\ -1 & 1-i & 1\\ 0 & 1 & 2-i\end{bmatrix}$$

који је једнак, управо како и треба, баш полазној, задатој матрици $\mathscr{D}$.

Унитарни оператор, односно матрица којом се он представља у матричном простору, добија се уједињавањем компоненти сва три својствена вектора

$$\left\{|v_1\rangle^{\text{norm}}\to\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix},|v_2\rangle^{\text{norm}}\to\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},|v_3\rangle^{\text{norm}}\to\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}\right\},$$

при чему предматрични коефицијент мора бити једнак за сва три својствена вектора

$$\left\{|v_1\rangle^{\text{norm}}\to\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix},|v_2\rangle^{\text{norm}}\to\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}\sqrt{3}\\0\\\sqrt{3}\end{bmatrix},|v_3\rangle^{\text{norm}}\to\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-\sqrt{2}\\\sqrt{2}\\\sqrt{2}\end{bmatrix}\right\},$$

на следећи начин

$$\mathscr{U}=\left[|v_1\rangle^{\text{norm}}\middle||v_2\rangle^{\text{norm}}\middle||v_3\rangle^{\text{norm}}\right]=\frac{1}{\sqrt{6}}\left[\begin{array}{c|c|c}1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2}\\ 2 & 0 & \sqrt{2}\\ -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2}\end{array}\right]=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2}\\ 2 & 0 & \sqrt{2}\\ -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2}\end{bmatrix}.$$

Матрица оператора адјунгованог добијеном добија се транспоновањем врста и колона горње матрице, уз комплексно коњуговање комплексних матричних елемената

$$\mathscr{U}^{\dagger}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2}\\ 2 & 0 & \sqrt{2}\\ -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2}\end{bmatrix}^{\dagger}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ \sqrt{3} & 0 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2}\end{bmatrix}.$$

Сада се може проверити формула за трансформацију сличности

$$\mathscr{D}_{\text{dij}}=\mathscr{U}^{\dagger}\mathscr{D}\,\mathscr{U}$$

на следећи начин

$$\mathscr{U}^{\dagger}\mathscr{D}\,\mathscr{U}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ \sqrt{3} & 0 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2-i & -1 & 0\\ -1 & 1-i & 1\\ 0 & 1 & 2-i\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2}\\ 2 & 0 & \sqrt{2}\\ -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2}\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ \sqrt{3} & 0 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2-i & -1 & 0\\ -1 & 1-i & 1\\ 0 & 1 & 2-i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2}\\ 2 & 0 & \sqrt{2}\\ -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2}\end{bmatrix}$$

односно

$$
\mathscr{U}^{\dagger}\mathscr{D}\mathscr{U}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ \sqrt{3} & 0 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(2-i)\cdot 1+(-1)\cdot 2+0\cdot(-1) & (2-i)\sqrt{3}+(-1)\cdot 0+0\cdot\sqrt{3} & (2-i)(-\sqrt{2})+(-1)\cdot\sqrt{2}+0\cdot\sqrt{2}\\ (-1)\cdot 1+(1-i)\cdot 2+1\cdot(-1) & (-1)\sqrt{3}+(1-i)\cdot 0+1\cdot\sqrt{3} & (-1)(-\sqrt{2})+(1-i)\cdot\sqrt{2}+1\cdot\sqrt{2}\\ 0\cdot 1+1\cdot 2+(2-i)\cdot(-1) & 0\cdot\sqrt{3}+1\cdot 0+(2-i)\cdot\sqrt{3} & 0\cdot(-\sqrt{2})+1\cdot\sqrt{2}+(2-i)\cdot\sqrt{2}\end{bmatrix}
$$

$$
=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ \sqrt{3} & 0 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2-i-2 & (2-i)\sqrt{3} & (i-2)\sqrt{2}-\sqrt{2}\\ -1+2(1-i)-1 & -\sqrt{3}+\sqrt{3} & \sqrt{2}+(1-i)\sqrt{2}+\sqrt{2}\\ 2+i-2 & (2-i)\sqrt{3} & \sqrt{2}+(2-i)\sqrt{2}\end{bmatrix}
$$

$$
=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ \sqrt{3} & 0 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-i & (2-i)\sqrt{3} & (i-3)\sqrt{2}\\ -2i & 0 & (3-i)\sqrt{2}\\ i & (2-i)\sqrt{3} & (3-i)\sqrt{2}\end{bmatrix}
$$

$$
=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1\cdot(-i)+2\cdot(-2i)+(-1)\cdot i & 1\cdot(2-i)\sqrt{3}+2\cdot 0+(-1)\cdot(2-i)\sqrt{3} & 1\cdot(i-3)\sqrt{3}+2\cdot(3-i)\sqrt{2}+(-1)\cdot(3-i)\sqrt{3}\\ \sqrt{3}\cdot(-i)+0\cdot(-2i)+\sqrt{3}\cdot i & \sqrt{3}\cdot(2-i)\sqrt{3}+0\cdot 0+\sqrt{3}\cdot(2-i)\sqrt{3} & \sqrt{3}\cdot(i-3)\sqrt{3}+0\cdot(3-i)\sqrt{2}+\sqrt{3}\cdot(3-i)\sqrt{3}\\ (-\sqrt{2})\cdot(-i)+\sqrt{2}\cdot(-2i)+\sqrt{2}\cdot i & (-\sqrt{2})\cdot(2-i)\sqrt{3}+\sqrt{2}\cdot 0+\sqrt{2}\cdot(2-i)\sqrt{3} & (-\sqrt{2})\cdot(i-3)\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot(3-i)\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot(3-i)\sqrt{2}\end{bmatrix}
$$

$$
=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}-6i & (2-i)\sqrt{3}-(2-i)\sqrt{3} & (i-3)\sqrt{3}+2(3-i)\sqrt{2}-(3-i)\sqrt{3}\\ -i\sqrt{3}+i\sqrt{3} & 3(2-i)+3(2-i) & 3(i-3)+3(3-i)\\ i\sqrt{2}-2i\sqrt{2}+i\sqrt{2} & -(2-i)\sqrt{6}+(2-i)\sqrt{6} & 2(3-i)+2(3-i)+2(3-i)\end{bmatrix}
$$

$$
=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}-6i & 0 & 0\\ 0 & 6(2-i) & 0\\ 0 & 0 & 6(3-i)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-i & 0 & 0\\ 0 & 2-i & 0\\ 0 & 0 & 3-i\end{bmatrix}=\mathscr{D}_{\text{dij}}
$$

чиме је трансформација сличности потврђена.

(10.10) За оператор

$$\hat{A}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (2\xi_1 + \xi_2, \xi_1 + 2\xi_2, \xi_3)$$

одредити матрице које представљају $\hat{A}$ и $\hat{A}^\dagger$, али у базису

$$\left\{ \left| v_1 \right\rangle = (1,0,0), \left| v_2 \right\rangle = (1,1,0), \left| v_3 \right\rangle = (1,1,1) \right\}$$

а потом решити његов *својствени проблем* и одредити му *спектралну форму*.

За почетак, а све у циљу загревања, прво ће бити добијене матрице које представљају задати оператор у апсолутном базису; то се постиже његовим деловањем на векторе апсолутног базиса

$$\left\{ \left| \mathrm{e}_1 \right\rangle = (1,0,0), \left| \mathrm{e}_2 \right\rangle = (0,1,0), \left| \mathrm{e}_3 \right\rangle = (0,0,1) \right\}$$

у простору $\mathbb{R}^3$

$$\hat{A}\left| \mathrm{e}_1 \right\rangle = \hat{A}(1,0,0) = (2,1,0)$$
$$\hat{A}\left| \mathrm{e}_2 \right\rangle = \hat{A}(0,1,0) = (1,2,0)$$
$$\hat{A}\left| \mathrm{e}_3 \right\rangle = \hat{A}(0,0,1) = (0,0,1)$$

а потом писањем тако добијених вектора, на основу основне формуле репрезентовања, као линеарних комбинација вектора апсолутног базиса

$$\hat{A}\left| \mathrm{e}_1 \right\rangle = (2,1,0) = 2\cdot(1,0,0) + 1\cdot(0,1,0) + 0\cdot(0,0,1) = 2\left| \mathrm{e}_1 \right\rangle + 1\left| \mathrm{e}_2 \right\rangle + 0\left| \mathrm{e}_3 \right\rangle$$
$$\hat{A}\left| \mathrm{e}_2 \right\rangle = (1,2,0) = 1\cdot(1,0,0) + 2\cdot(0,1,0) + 0\cdot(0,0,1) = 1\left| \mathrm{e}_1 \right\rangle + 2\left| \mathrm{e}_2 \right\rangle + 0\left| \mathrm{e}_3 \right\rangle$$
$$\hat{A}\left| \mathrm{e}_3 \right\rangle = (0,0,1) = 0\cdot(1,0,0) + 0\cdot(0,1,0) + 1\cdot(0,0,1) = 0\left| \mathrm{e}_1 \right\rangle + 0\left| \mathrm{e}_2 \right\rangle + 1\left| \mathrm{e}_3 \right\rangle$$

одакле се коефицијенти у горњим развојима пишу као елементи матрице

$$\mathscr{A} = \left[\hat{A} \right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица којом се представља оператор адјунгован задатом добија се транспоновањем врста и колона горње матрице, док је комплексно коњуговање матричних елемената непотребно, јер је сваки од њих реалан број

$$\mathscr{A}^\dagger = \left[\hat{A}^\dagger \right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\dagger = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Очигледно је ($\mathscr{A}^\dagger = \mathscr{A}$) да је задати оператор $\hat{A}$ ермитски оператор: $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$.

На потпуно аналоган начин се сада на векторе задатог базиса

$$\left\{ \left| v_1 \right\rangle = (1,0,0), \left| v_2 \right\rangle = (1,1,0), \left| v_3 \right\rangle = (1,1,1) \right\},$$

делује датим оператором

$$\hat{A}|v_1\rangle = \hat{A}(1,0,0) = (2\cdot 1+1\cdot 0, 1+2\cdot 0, 1\cdot 0) = (2,1,0)$$
$$\hat{A}|v_2\rangle = \hat{A}(1,1,0) = (2\cdot 1+1\cdot 1, 1+2\cdot 1, 1\cdot 0) = (3,3,0)$$
$$\hat{A}|v_3\rangle = \hat{A}(1,1,1) = (2\cdot 1+1\cdot 1, 1+2\cdot 1, 1\cdot 1) = (3,3,1)$$

при чему сада горе добијене векторе треба написати, опет према основној формули репрезентовања, као линеарну комбинацију, али овог пута не вектора из апсолутног базиса, већ задатих вектора

$$\hat{A}|v_1\rangle = (2,1,0) = \alpha|v_1\rangle + \beta|v_2\rangle + \gamma|v_3\rangle$$
$$\hat{A}|v_2\rangle = (3,3,0) = \delta|v_1\rangle + \varepsilon|v_2\rangle + \xi|v_3\rangle$$
$$\hat{A}|v_3\rangle = (3,3,1) = \mu|v_1\rangle + \eta|v_2\rangle + \psi|v_3\rangle$$

односно, у развијеном облику

$$(2,1,0) = \alpha(1,0,0) + \beta(1,1,0) + \gamma(1,1,1) = (\alpha,0,0) + (\beta,\beta,0) + (\gamma,\gamma,\gamma) = (\alpha+\beta+\gamma, \beta+\gamma, \gamma)$$
$$(3,3,0) = \delta(1,0,0) + \varepsilon(1,1,0) + \xi(1,1,1) = (\delta,0,0) + (\varepsilon,\varepsilon,0) + (\xi,\xi,\xi) = (\delta+\varepsilon+\xi, \varepsilon+\xi, \xi)$$
$$(3,3,1) = \mu(1,0,0) + \eta(1,1,0) + \psi(1,1,1) = (\mu,0,0) + (\eta,\eta,0) + (\psi,\psi,\psi) = (\mu+\eta+\psi, \eta+\psi, \psi)$$

Из првог од горе добијених израза

$$(2,1,0) = (\alpha+\beta+\gamma, \beta+\gamma, \gamma)$$

следи систем једначина

$$\underline{\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=2\\ \beta+\gamma=1\\ \gamma=0\end{cases}} \Rightarrow \underline{\begin{cases}\alpha+\beta=2\\ \beta=1\\ \gamma=0\end{cases}} \Rightarrow \underline{\begin{cases}\alpha+1=2\\ \beta=1\\ \gamma=0\end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=1\\ \gamma=0\end{cases}}$$

те онда прва формула репрезентовања гласи

$$\hat{A}|v_1\rangle = 1|v_1\rangle + 1|v_2\rangle + 0|v_3\rangle .$$

Из другог од горе добијених израза

$$(3,3,0) = (\delta+\varepsilon+\xi, \varepsilon+\xi, \xi)$$

следи систем једначина

$$\underline{\begin{cases}\delta+\varepsilon+\xi=3\\ \varepsilon+\xi=3\\ \xi=0\end{cases}} \Rightarrow \underline{\begin{cases}\delta+\varepsilon=3\\ \varepsilon=3\\ \xi=0\end{cases}} \Rightarrow \underline{\begin{cases}\delta+3=3\\ \varepsilon=3\\ \xi=0\end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases}\delta=0\\ \varepsilon=3\\ \xi=0\end{cases}}$$

те онда друга формула репрезентовања гласи

$$\hat{A}|v_2\rangle = 0|v_1\rangle + 3|v_2\rangle + 0|v_3\rangle .$$

Из трећег од горе добијених израза

$$(3,3,1) = (\mu+\eta+\psi, \eta+\psi, \psi)$$

следи систем једначина

$$\begin{cases}\mu+\eta+\psi=3\\ \eta+\psi=3\\ \psi=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\mu+\eta+1=3\\ \eta+1=3\\ \psi=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\mu+\eta=2\\ \eta=2\\ \psi=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\mu+2=2\\ \eta=2\\ \psi=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\mu=0\\ \eta=2\\ \psi=1\end{cases}$$

те онда трећа формула репрезентовања гласи

$$\hat{A}|v_3\rangle = 0|v_1\rangle + 2|v_2\rangle + 1|v_3\rangle .$$

Када се све три формуле репрезентовања поставе једна испод друге

$$\begin{aligned}\hat{A}|v_1\rangle &= 1|v_1\rangle + 1|v_2\rangle + 0|v_3\rangle\\ \hat{A}|v_2\rangle &= 0|v_1\rangle + 3|v_2\rangle + 0|v_3\rangle\\ \hat{A}|v_3\rangle &= 0|v_1\rangle + 2|v_2\rangle + 1|v_3\rangle\end{aligned}$$

одмах се може написати матрица којом се представља оператор у задатом базису

$$\mathscr{A} = \left[\hat{A}\right]_{\{|v_i\rangle\}} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Матрица адјунгованог оператора добија се транспоновањем, уз поновно занемаривање комплексног коњуговања реалних матричних елемената

$$\mathscr{A}^{\dagger} = \left[\hat{A}^{\dagger}\right]_{\{|v_i\rangle\}} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}.$$

Сада треба решити својствени проблем задатог оператора

$$\hat{A}|v\rangle = \lambda|v\rangle$$

који, написан у матричном облику гласи

$$\mathscr{A}\,\xi = \lambda\,\xi$$

односно

$$\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{bmatrix}$$

илити

$$\begin{bmatrix}2-\lambda & 1 & 0\\ 1 & 2-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 1-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}.$$

Да решење својственог проблема не би било тривијално, матрица ξ мора имати барем једну компоненту различиту од нуле, а то значи да детерминанта задате матрице мора бити једнака нули

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0\,.$$

Решавањем овог израза

$$(1-\lambda)(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow\ (1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0\ \Leftrightarrow\ (1-\lambda)\left[(2-\lambda)(2-\lambda)-1\cdot 1\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow\ (1-\lambda)\left[(2-\lambda)^2-1^2\right] = 0\ \Leftrightarrow\ (1-\lambda)(2-\lambda-1)(2-\lambda+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow\ (1-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda) = 0\ \Rightarrow\ \underline{\begin{cases} 1-\lambda_1 = 0 \\ 1-\lambda_2 = 0 \\ 3-\lambda_3 = 0 \end{cases}}\ \Leftrightarrow\ \underline{\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 3 \end{cases}}$$

добијају се три својствене вредности матрице $\mathscr{A}$

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1 \text{ и } \lambda_3 = 3$$

којима одговарају три својствене једначине

$$\underline{\begin{cases} \hat{A}|v_1\rangle = \lambda_1|v_1\rangle = 1|v_1\rangle \\ \hat{A}|v_2\rangle = \lambda_2|v_2\rangle = 1|v_2\rangle \\ \hat{A}|v_3\rangle = \lambda_3|v_3\rangle = 3|v_3\rangle \end{cases}}$$

које, написане у облику који одговара основној формули репрезентовања

$$\underline{\begin{cases} \hat{A}|v_1\rangle = 1|v_1\rangle + 0|v_2\rangle + 0|v_3\rangle \\ \hat{A}|v_2\rangle = 0|v_1\rangle + 1|v_2\rangle + 0|v_3\rangle \\ \hat{A}|v_3\rangle = 0|v_1\rangle + 0|v_2\rangle + 3|v_3\rangle \end{cases}}$$

дају *дијагоналну форму* матрице, тј. матрицу оператора $\hat{A}$ у његовом својственом базису

$$\mathscr{A}_{\text{dij}} = \left[\hat{A}\right]_{\{|v_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Познато је да се матричним изразом

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

на једноставнији начин записује систем једначина

$$\begin{cases}(2-\lambda)\xi_1+\xi_2=0\\ \xi_1+(2-\lambda)\xi_2=0\\ (1-\lambda)\xi_3=0\end{cases}$$

Заменом прве (дегенерисане) својствене вредности $\lambda_{1,2}=1$ у горњи систем следи

$$\begin{cases}(2-\lambda_{1,2})\xi_1+\xi_2=0\\ \xi_1+(2-\lambda_{1,2})\xi_2=0\\ (1-\lambda_{1,2})\xi_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(2-1)\xi_1+\xi_2=0\\ \xi_1+(2-1)\xi_2=0\\ (1-1)\xi_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\xi_1+\xi_2=0\\ \xi_1+\xi_2=0\\ 0\cdot\xi_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\xi_1=-\xi_2\\ \xi_1+\xi_2=0\\ 0\cdot\xi_3=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\xi_1=-\xi_2\\ -\xi_2+\xi_2=0\\ 0\cdot\xi_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\xi_1=-\xi_2\\ 0\cdot\xi_2=0\\ 0\cdot\xi_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\xi_1=-\xi_2\\ \xi_2\in\mathbb{R}\\ \xi_3\in\mathbb{R}\end{cases}$$

Услед дегенерације својствене вредности $\lambda_{1,2}=1$ њој морају одговарати два својствена вектора; како су ξ_2 и ξ_3 произвољни реални бројеви, прво се бира да је $\xi_2=1$ и $\xi_3=0$, те је онда $\xi_1=-1$; први својствени вектор може се записати као матрица-колона

$$\left[|v_1\rangle\right]_{\{|v_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$$

или као уређена тројка

$$|v_1\rangle=(-1,1,0)\,.$$

Потом се узима да је $\xi_2=0$ и $\xi_3=1$, те је онда $\xi_1=0$; други својствени вектор дат је као матрица-колона

$$\left[|v_2\rangle\right]_{\{|v_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

или као уређена тројка

$$|v_2\rangle=(0,0,1)\,.$$

Оба добијена својствена вектора одговарају дегенерисаној својственој вредности $\lambda_{1,2}=1$.

Након замене треће својствене вредности $\lambda_3=3$ у систем једначина следи

$$\begin{cases}(2-\lambda_3)\xi_1+\xi_2=0\\ \xi_1+(2-\lambda_3)\xi_2=0\\ (1-\lambda_3)\xi_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(2-3)\xi_1+\xi_2=0\\ \xi_1+(2-3)\xi_2=0\\ (1-3)\xi_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-\xi_1+\xi_2=0\\ \xi_1-\xi_2=0\\ -2\xi_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\xi_1=\xi_2\\ \xi_1-\xi_2=0\\ \xi_3=0\end{cases}$$

односно

$$\begin{cases}\xi_1=\xi_2\\ \xi_2-\xi_2=0\\ \xi_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\xi_1=\xi_2\\ 0\cdot\xi_2=0\\ \xi_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\xi_1=\xi_2\\ \xi_2\in\mathbb{R}\\ \xi_3=0\end{cases}$$

Да би се избегло добијање нултог вектора, бира се да је $\xi_2=1$, одакле следи да је $\xi_1=1$. То значи да се трећи својствени вектор, који одговара трећој својственој вредности $\lambda_3=3$, може представити било као матрица-колона

$$\left[|v_3\rangle\right]_{\{|v_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

било као уређена тројка

$$|v_3\rangle=(1,1,0).$$

Да би се могла добити *спектрална форма*, треба ортонормирати три својствена вектора

$$\left\{|v_1\rangle=(-1,1,0),|v_2\rangle=(0,0,1),|v_3\rangle=(1,1,0)\right\}$$

Грам-Шмитовим поступком.

Пошто су добијени својствени вектори већ *ортогонални* међусобно

$$\langle v_1|v_2\rangle=\langle(-1,1,0)|(0,0,1)\rangle=\sqrt{(-1)^*\cdot 0+1^*\cdot 0+0^*\cdot 1}=\sqrt{0}=0,$$

$$\langle v_1|v_3\rangle=\langle(-1,1,0)|(1,1,0)\rangle=\sqrt{(-1)^*\cdot 1+1^*\cdot 1+0^*\cdot 0}=\sqrt{-1+1}=\sqrt{0}=0,$$

$$\langle v_2|v_3\rangle=\langle(0,0,1)|(1,1,0)\rangle=\sqrt{0^*\cdot 1+0^*\cdot 1+1\cdot 0}=\sqrt{0}=0$$

довољно их је *нормирати*, односно поделити сваки од њих са својом нормом

$$|v_1\rangle^{\text{norm}}=\frac{|v_1\rangle}{\||v_1\rangle\|}=\frac{|v_1\rangle}{\sqrt{\langle v_1|v_1\rangle}}=\frac{(-1,1,0)}{\sqrt{\langle(-1,1,0)|(-1,1,0)\rangle}}=\frac{(-1,1,0)}{\sqrt{(-1)^*\cdot(-1)+1^*\cdot 1+0^*\cdot 0}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0),$$

$$|v_2\rangle^{\text{norm}}=\frac{|v_2\rangle}{\||v_2\rangle\|}=\frac{|v_2\rangle}{\sqrt{\langle v_2|v_2\rangle}}=\frac{(0,0,1)}{\sqrt{\langle(0,0,1)|(0,0,1)\rangle}}=\frac{(0,0,1)}{\sqrt{0^*\cdot 0+0^*\cdot 0+1^*\cdot 1}}=\frac{(0,0,1)}{\sqrt{1}}=(0,0,1),$$

$$|v_3\rangle^{\text{norm}}=\frac{|v_3\rangle}{\||v_3\rangle\|}=\frac{|v_3\rangle}{\sqrt{\langle v_3|v_3\rangle}}=\frac{(1,1,0)}{\sqrt{\langle(1,1,0)|(1,1,0)\rangle}}=\frac{(1,1,0)}{\sqrt{1^*\cdot 1+1^*\cdot 1+0^*\cdot 0}}=\frac{(1,1,0)}{\sqrt{1+1+0}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$$

те је тако добијен потребни ортонормирани својствени базис

$$\left\{|v_1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0),|v_2\rangle=(0,0,1),|v_3\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)\right\}$$

или, записано у облику матрица-колона (због изоморфизма векторског простора матрица и векторског простора уређених парова)

$$\left\{ |v_1\rangle^{\text{norm}} \to \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}, |v_2\rangle^{\text{norm}} \to \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, |v_3\rangle^{\text{norm}} \to \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \right\}.$$

Сада се најзад може извести *спектрална форма* задате матрице, као линеарна комбинација пројектора на први дводимензионални и други једнодимензионални својствени потпростор

$$\hat{A} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \hat{P}_{\lambda_i} = \lambda_1 \hat{P}_{\lambda_1} + \lambda_2 \hat{P}_{\lambda_2} + \lambda_3 \hat{P}_{\lambda_3} = \lambda_1 |v_1\rangle^{\text{norm norm}}\langle v_1| + \lambda_2 |v_2\rangle^{\text{norm norm}}\langle v_2| + \lambda_3 |v_3\rangle^{\text{norm norm}}\langle v_3|$$

наравно, написана у матричном простору као линеарна комбинација одговарајућих матрица-колона и матрица-врста

$$\mathscr{A}_{\text{spektr}} = 1\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}^{\dagger} + 1\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}^{\dagger} + 3\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}^{\dagger}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix} + \frac{3}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\-1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} + \frac{3}{2}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\-1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 2\end{bmatrix} + \frac{3}{2}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\-1 & 1 & 0\\0 & 0 & 2\end{bmatrix} + \frac{3}{2}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Провера тачности спектралне форме врши се множењем скаларима квадратних матрица а потом њиховим матричним сабирањем

$$\mathscr{A}_{\text{spektr}} = \begin{bmatrix}1/2 & -1/2 & 0\\-1/2 & 1/2 & 0\\0 & 0 & 2/2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3/2 & 3/2 & 0\\3/2 & 3/2 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1/2+3/2 & -1/2+3/2 & 0\\-1/2+3/2 & 1/2+3/2 & 0\\0 & 0 & 2/2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4/2 & 2/2 & 0\\2/2 & 4/2 & 0\\0 & 0 & 2/2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\1 & 2 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

чиме је добијена, баш како и треба, матрица $\mathscr{A}$ којом се представља оператор $\hat{A}$ у апсолутном базису.

(10.11) Показати да за сваки унитарни оператор $\hat{U}$ у КДУП $\mathbb{U}$ постоји један ермитски оператор у истом простору, такав да је

$$\hat{U} = \mathrm{e}^{i\hat{H}} .$$

За почетак, треба проверити *егзистенцију*, односно да ли је задати оператор стварно унитаран

$$\hat{U}^{\dagger} = (\mathrm{e}^{i\hat{H}})^{\dagger} = \mathrm{e}^{(i\hat{H})^{\dagger}} = \mathrm{e}^{-i\hat{H}^{\dagger}} = \mathrm{e}^{-i\hat{H}} = (\mathrm{e}^{i\hat{H}})^{-1} = \hat{U}^{-1},$$

Наравно, задати оператор је унитаран само ако је $\hat{H}^{\dagger} = \hat{H}$.

Потом треба проверити и *јединственост*, тј. да ли једном $\hat{U}$ одговара само један $\hat{H}$. Рецимо да једном $\hat{U}$ одговарају два $\hat{H}$, онда се могу написати следећа два Тејлорова реда

$$\hat{U} = \mathrm{e}^{i\hat{H}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\hat{H})^n}{n!} \quad \text{и} \quad \hat{U} = \mathrm{e}^{i\hat{H}'} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\hat{H}')^n}{n!} .$$

Познато је да су два реда једнака ако су им једнаки сви чланови понаособ, значи

$$\frac{(i\hat{H})^n}{n!} = \frac{(i\hat{H}')^n}{n!} \Rightarrow (i\hat{H})^n = (i\hat{H}')^n \Leftrightarrow i\hat{H} = i\hat{H}' \Leftrightarrow \hat{H} = \hat{H}'$$

те је сасвим јасно да једном унитарном оператору $\hat{U}$ одговара јединствени оператор $\hat{H}$.

Ако је $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, \dots, |v_n\rangle\}$ ортонормирани својствени базис оператора $\hat{U}$, при чему су одговарајуће својствене вредности: $\lambda_i = \mathrm{e}^{ih_i}$, чији модуо мора бити једнак 1

$$|\lambda_i| = \sqrt{|\lambda_i|^2} = \sqrt{\lambda_i \lambda_i^*} = \sqrt{(\mathrm{e}^{ih_i})(\mathrm{e}^{ih_i})^*} = \sqrt{\mathrm{e}^{ih_i}\,\mathrm{e}^{-ih_i^*}} = \sqrt{\mathrm{e}^{ih_i}\,\mathrm{e}^{-ih_i}} = \sqrt{\mathrm{e}^{ih_i - ih_i}} = \sqrt{\mathrm{e}^0} = \sqrt{1} = 1$$

онда је

$$\begin{cases} \hat{U}|v_1\rangle = \lambda_1 |v_1\rangle \\ \hat{U}|v_2\rangle = \lambda_2 |v_2\rangle \\ \quad\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ \hat{U}|v_n\rangle = \lambda_n |v_n\rangle \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{e}^{i\hat{H}}|v_1\rangle = \mathrm{e}^{ih_1}|v_1\rangle \\ \mathrm{e}^{i\hat{H}}|v_2\rangle = \mathrm{e}^{ih_2}|v_2\rangle \\ \quad\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ \mathrm{e}^{i\hat{H}}|v_n\rangle = \mathrm{e}^{ih_n}|v_n\rangle \end{cases} \Rightarrow \mathscr{U} = \left[\hat{U}\right]_{\{|v_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{ih_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{ih_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathrm{e}^{ih_n} \end{bmatrix}.$$

Да би модуо својствених вреności $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ био једнак 1, бројеви $h_1, h_2, \dots, h_n$ у експонентима морају бити *реални*; онда је оператор $\hat{H}$ управо онај који је, у истом базису репрезентовања, представљен *дијагоналном матрицом*, са матричним елементима $h_1, h_2, \dots, h_n$ на главној дијагонали

$$\mathscr{H} = \left[\hat{H}\right]_{\{|v_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & h_n \end{bmatrix}.$$

Будући да има *реалне* својствене вредности и *ортонормирани* својствени базис, оператор $\hat{H}$ мора бити *ермитски оператор*.

(10.12) Показати да је $\hat{A}$ *позитиван* оператор; одредити позитивни оператор $\hat{B}$ (*квадратни корен* оператора $\hat{A}$) за који важи да је $\hat{B}^2 = \hat{A}$

(а) $\hat{A}(\xi_1, \xi_2) = (5\xi_1 - 3\xi_2, -3\xi_1 + 5\xi_2)$;

(б) $\hat{A}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (2\xi_1 + \xi_2 + \xi_3, \xi_1 + 2\xi_2 + \xi_3, \xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3)$;

(в) $\hat{A}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (24\xi_1 + 6\xi_2 - 12\xi_3, 6\xi_1 + 33\xi_2 + 6\xi_3, -12\xi_1 + 6\xi_2 + 24\xi_3)$.

(а) Да би задати оператор $\hat{A}$ био *позитиван*, мора да важи израз $\left\langle v \middle| \hat{A} v \right\rangle \geq 0$. То ће сада бити проверено

$$\begin{aligned}
&\left\langle (\xi_1, \xi_2) \middle| \hat{A}(\xi_1, \xi_2) \right\rangle \geq 0 \iff \left\langle (\xi_1, \xi_2) \middle| (5\xi_1 - 3\xi_2, -3\xi_1 + 5\xi_2) \right\rangle \geq 0 \\
&\iff \xi_1(5\xi_1 - 3\xi_2) + \xi_2(-3\xi_1 + 5\xi_2) \geq 0 \iff 5\xi_1^2 - 3\xi_1\xi_2 - 3\xi_1\xi_2 + 5\xi_2^2 \geq 0 \\
&\iff 5(\xi_1^2 + \xi_2^2) \geq 6\xi_1\xi_2
\end{aligned}$$

Наравно да је горњи израз увек испуњен, пошто ће његова ЛС (као збира квадрата ξ_1^2 и ξ_2^2) увек бити *већа* (ако је ξ_1 супротног предзнака од ξ_2) или *једнака* (ако је ξ_1 истог предзнака као и ξ_2) ДС (као производа ξ_1 и ξ_2).

Матрица којом се представља задати оператор $\hat{A}$ у апсолутном базису добија се његовим деловањем на векторе апсолутног базиса $\left\{ |\mathrm{e}_1\rangle = (1,0), |\mathrm{e}_2\rangle = (0,1) \right\}$

$$\begin{aligned}
\hat{A}|\mathrm{e}_1\rangle &= \hat{A}(1,0) = (5 \cdot 1 - 3 \cdot 0, -3 \cdot 1 + 5 \cdot 0) = (5, -3) \\
\hat{A}|\mathrm{e}_2\rangle &= \hat{A}(0,1) = (5 \cdot 0 - 3 \cdot 1, -3 \cdot 0 + 5 \cdot 1) = (-3, 5)
\end{aligned}$$

а потом писањем тако добијених вектора, на основу основне формуле репрезентовања, као линеарних комбинација вектора апсолутног базиса

$$\begin{aligned}
\hat{A}|\mathrm{e}_1\rangle &= (5,0) + (0,-3) = 5(1,0) + (-3)(0,1) = 5|\mathrm{e}_1\rangle + (-3)|\mathrm{e}_2\rangle \\
\hat{A}|\mathrm{e}_2\rangle &= (-3,0) + (0,5) = (-3)(1,0) + 5(0,1) = (-3)|\mathrm{e}_1\rangle + 5|\mathrm{e}_2\rangle
\end{aligned}$$

одакле се коефицијенти у горњим развојима пишу (транспоновано!) као елементи матрице

$$\mathscr{A} = \left[\hat{A}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Својствени проблем задатог оператора

$$\hat{A}|v\rangle = \lambda |v\rangle$$

написан у матричном облику гласи

$$\mathscr{A}\xi = \lambda \xi$$

односно

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$$

илити

$$\begin{bmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -3 & 5-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Да решење својственог проблема не би било тривијално, матрица ξ мора имати барем једну компоненту различиту од нуле, а то значи да детерминанта горње матрице мора бити једнака нули

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Решавањем овог израза

$$(5-\lambda)(5-\lambda)-(-3)\cdot(-3)=0 \iff (5-\lambda)^2-3^2=0$$

$$\iff (5-\lambda-3)(5-\lambda+3)=0 \iff (2-\lambda)(8-\lambda)=0 \Rightarrow \underline{\begin{cases} 2-\lambda_1=0 \\ 8-\lambda_2=0 \end{cases}} \iff \underline{\begin{cases} \lambda_1=2 \\ \lambda_2=8 \end{cases}}$$

добијају се две различите својствене вредности матрице $\mathscr{A}$

$$\lambda_1 = 2 \text{ и } \lambda_2 = 8$$

којима одговарају две својствене једначине

$$\underline{\begin{cases} \hat{A}|v_1\rangle = \lambda_1|v_1\rangle = 2|v_1\rangle \\ \hat{A}|v_2\rangle = \lambda_2|v_2\rangle = 8|v_2\rangle \end{cases}}$$

које, написане у облику који одговара основној формули репрезентовања

$$\underline{\begin{cases} \hat{A}|v_1\rangle = 2|v_1\rangle + 0|v_2\rangle \\ \hat{A}|v_2\rangle = 0|v_1\rangle + 8|v_2\rangle \end{cases}}$$

дају *дијагоналну форму* матрице, тј. матрицу оператора $\hat{A}$ у његовом својственом базису

$$\mathscr{A}_{\text{dij}} = \left[\hat{A}\right]_{\{|v_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

Познато је да се матричним изразом

$$\begin{bmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -3 & 5-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

на једноставнији начин записује систем једначина

$$\underline{\begin{cases} (5-\lambda)\xi_1 - 3\xi_2 = 0 \\ -3\xi_1 + (5-\lambda)\xi_2 = 0 \end{cases}}$$

Заменом прве својствене вредности $\lambda_1 = 2$ у горњи систем следи

$$\begin{cases}(5-\lambda_1)\xi_1 - 3\xi_2 = 0\\ -3\xi_1 + (5-\lambda_1)\xi_2 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(5-2)\xi_1 - 3\xi_2 = 0\\ -3\xi_1 + (5-2)\xi_2 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3\xi_1 - 3\xi_2 = 0\\ -3\xi_1 + 3\xi_2 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\xi_1 - \xi_2 = 0\\ -\xi_1 + \xi_2 = 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\xi_1 = \xi_2\\ -\xi_1 + \xi_2 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\xi_1 = \xi_2\\ -\xi_2 + \xi_2 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\xi_1 = \xi_2\\ 0\cdot\xi_2 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\xi_1 = \xi_2\\ \xi_2 \in \mathbb{R}\end{cases}$$

Како би нулти вектор био тривијално решење својственог проблема, бира се да је $\xi_2 = 1$, те је онда $\xi_1 = 1$; тада се први својствени вектор може записати као матрица-колона

$$\left[|v_1\rangle\right]_{\{|v_i\rangle\}} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

или као уређени пар

$$|v_1\rangle = (1,1)\,.$$

Овако добијени својствени вектор одговара првој својственој вредности $\lambda_1 = 2$.

Након замене друге својствене вредности $\lambda_2 = 8$ у горњи систем једначина следи

$$\begin{cases}(5-\lambda_2)\xi_1 - 3\xi_2 = 0\\ -3\xi_1 + (5-\lambda_2)\xi_2 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(5-8)\xi_1 - 3\xi_2 = 0\\ -3\xi_1 + (5-8)\xi_2 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-3\xi_1 - 3\xi_2 = 0\\ -3\xi_1 - 3\xi_2 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\xi_1 + \xi_2 = 0\\ \xi_1 + \xi_2 = 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\xi_1 = -\xi_2\\ \xi_1 + \xi_2 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\xi_1 = -\xi_2\\ -\xi_2 + \xi_2 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\xi_1 = -\xi_2\\ 0\cdot\xi_2 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\xi_1 = -\xi_2\\ \xi_2 \in \mathbb{R}\end{cases}$$

Да би се избегло добијање нултог вектора, бира се да је $\xi_2 = 1$, одакле следи да је $\xi_1 = -1$. Онда се други својствени вектор може представити било као матрица-колона

$$\left[|v_2\rangle\right]_{\{|v_i\rangle\}} = \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$$

било као уређени пар

$$|v_2\rangle = (-1,1)\,.$$

Овако добијени својствени вектор одговара другој својственој вредности $\lambda_2 = 8$.

Сада би требало да се, Грам-Шмитовим поступком, ортонормирају два својствена вектора

$$\left\{|v_1\rangle = (1,1), |v_2\rangle = (-1,1)\right\}.$$

Међутим, пошто су добијени својствени вектори већ *ортогонални* међусобно

$$\langle v_1|v_2\rangle = \langle(1,1)|(-1,1)\rangle = 1^*\cdot(-1) + 1^*\cdot 1 = -1+1 = 0$$

довољно их је *нормирати*, односно поделити сваки од њих са својом нормом

$$|v_1\rangle^{\text{norm}} = \frac{|v_1\rangle}{\left\||v_1\rangle\right\|} = \frac{|v_1\rangle}{\sqrt{\langle v_1|v_1\rangle}} = \frac{(1,1)}{\sqrt{\langle(1,1)|(1,1)\rangle}} = \frac{(1,1)}{\sqrt{1^*\cdot 1 + 1^*\cdot 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)\,,$$

$$|v_2\rangle^{\text{norm}} = \frac{|v_2\rangle}{\||v_2\rangle\|} = \frac{|v_2\rangle}{\sqrt{\langle v_2|v_2\rangle}} = \frac{(-1,1)}{\sqrt{\langle(-1,1)|(-1,1)\rangle}} = \frac{(-1,1)}{\sqrt{(-1)^*\cdot 1+(-1)^*\cdot 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$$

те је тако добијен потребни ортонормирани својствени базис

$$\left\{|v_1\rangle^{\text{norm}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1), |v_2\rangle^{\text{norm}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)\right\}$$

или, записано у облику матрица-колона (због изоморфизма векторског простора матрица и векторског простора уређених парова)

$$\left\{|v_1\rangle^{\text{norm}} \to \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, |v_2\rangle^{\text{norm}} \to \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right\}.$$

Ово је било неопходно урадити због *трансформације сличности*, преко које се може добити квадратни корен задатог оператора (матрице), на следећи начин

$$\mathscr{A}_{\text{dij}} = \mathscr{U}^{\dagger}\mathscr{A}\,\mathscr{U} \;\Leftrightarrow\; \mathscr{U}\mathscr{A}_{\text{dij}} = \mathscr{U}\mathscr{U}^{\dagger}\mathscr{A}\,\mathscr{U}\,.$$

Како је матрицом $\mathscr{U}$ представљен унитарни оператор $\hat{U}$, за кога важи да је $\hat{U}^{\dagger} = \hat{U}^{-1}$, то исто важи и за матрицу $\mathscr{U}^{\dagger} = \mathscr{U}^{-1}$, те ће бити

$$\mathscr{U}\mathscr{A}_{\text{dij}} = \mathscr{U}\mathscr{U}^{-1}\mathscr{A}\,\mathscr{U} \;\Leftrightarrow\; \mathscr{U}\mathscr{A}_{\text{dij}} = \mathscr{I}\mathscr{A}\,\mathscr{U} \;\Leftrightarrow\; \mathscr{U}\mathscr{A}_{\text{dij}} = \mathscr{A}\,\mathscr{U} \;\Leftrightarrow\; \mathscr{U}\mathscr{A}_{\text{dij}}\mathscr{U}^{-1} = \mathscr{A}\,\mathscr{U}\mathscr{U}^{-1}$$
$$\Leftrightarrow\; \mathscr{U}\mathscr{A}_{\text{dij}}\mathscr{U}^{-1} = \mathscr{A}\,\mathscr{I} \;\Leftrightarrow\; \mathscr{U}\mathscr{A}_{\text{dij}}\mathscr{U}^{-1} = \mathscr{A}$$

те је коначно

$$\mathscr{A} = \mathscr{U}\mathscr{A}_{\text{dij}}\mathscr{U}^{-1}$$

одакле следи да је

$$\mathscr{B} = \mathscr{U}\mathscr{B}_{\text{dij}}\mathscr{U}^{-1}$$

а како је према поставци задатка $\mathscr{B} = \sqrt{\mathscr{A}}$ и $\mathscr{B}_{\text{dij}} = \sqrt{\mathscr{A}_{\text{dij}}}$, биће

$$\sqrt{\mathscr{A}} = \mathscr{U}\sqrt{\mathscr{A}_{\text{dij}}}\,\mathscr{U}^{-1}.$$

Унитарна матрица добија се обједињавањем компоненти оба својствена вектора уз задржавање нетакнутог истог коефицијента испред оба вектора

$$\mathscr{U} = \left[|v_1\rangle^{\text{norm}}\,\middle|\,|v_2\rangle^{\text{norm}}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{array}{c|c}1 & -1\\1 & 1\end{array}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{bmatrix},$$

док се матрица инверзна унитарној добија се адјунговањем, тј. транспоновањем њених врста и колона, док је комплексно коњуговање реалних матричних елемената, наравно, непотребно

$$\mathscr{U}^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{bmatrix}.$$

Сада се може израчунати корен матрице задатог оператора

$$\sqrt{\mathscr{A}} = \mathscr{U}\sqrt{\mathscr{A}_{\mathrm{dij}}}\,\mathscr{U}^{-1}$$

на следећи начин

$$\begin{aligned}
\sqrt{\mathscr{A}} &= \mathscr{U}\sqrt{\mathscr{A}_{\mathrm{dij}}}\,\mathscr{U}^{-1}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\sqrt{\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 8\end{bmatrix}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{2} & 0\\ 0 & \sqrt{8}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{2}\cdot 1+0\cdot(-1) & \sqrt{2}\cdot 1+0\cdot 1\\ 0\cdot 1+\sqrt{8}\cdot(-1) & 0\cdot 1+\sqrt{8}\cdot 1\end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{2} & \sqrt{2}\\ -\sqrt{8} & \sqrt{8}\end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\cdot\sqrt{2}+(-1)\cdot(-\sqrt{8}) & 1\cdot\sqrt{2}+(-1)\cdot\sqrt{8}\\ 1\cdot\sqrt{2}+1\cdot(-\sqrt{8}) & 1\cdot\sqrt{2}+1\cdot\sqrt{8}\end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{2}+\sqrt{8} & \sqrt{2}-\sqrt{8}\\ \sqrt{2}-\sqrt{8} & \sqrt{2}+\sqrt{8}\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{2}+2\sqrt{2} & \sqrt{2}-2\sqrt{2}\\ \sqrt{2}-2\sqrt{2} & \sqrt{2}+2\sqrt{2}\end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}3\sqrt{2} & -\sqrt{2}\\ -\sqrt{2} & 3\sqrt{2}\end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}3 & -1\\ -1 & 3\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}3 & -1\\ -1 & 3\end{bmatrix} = \mathscr{B}
\end{aligned}$$

Из горе добијене матрице је јасно да је оператор $\hat{B}$ који представља корен задатог оператора

$$\hat{A}(\xi_1,\xi_2) = (5\xi_1 - 3\xi_2, -3\xi_1 + 5\xi_2)$$

дат формулом

$$\hat{B}(\xi_1,\xi_2) = (3\xi_1 - \xi_2, -\xi_1 + 3\xi_2)\,.$$

(б) Задати оператор $\hat{A}$ је *позитиван* ако важи израз $\left\langle v \middle| \hat{A}v \right\rangle \geq 0$. То ће сада бити проверено

$$\begin{aligned}
&\left\langle (\xi_1,\xi_2,\xi_3) \middle| \hat{A}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\right\rangle \geq 0 \;\Leftrightarrow\; \left\langle (\xi_1,\xi_2,\xi_3) \middle| (2\xi_1+\xi_2+\xi_3, \xi_1+2\xi_2+\xi_3, \xi_1+\xi_2+2\xi_3)\right\rangle \geq 0\\
&\Leftrightarrow\; \xi_1(2\xi_1+\xi_2+\xi_3)+\xi_2(\xi_1+2\xi_2+\xi_3)+\xi_3(\xi_1+\xi_2+2\xi_3) \geq 0\\
&\Leftrightarrow\; 2\xi_1^2+\xi_1\xi_2+\xi_1\xi_3+\xi_2\xi_1+2\xi_2^2+\xi_2\xi_3+\xi_3\xi_1+\xi_3\xi_2+2\xi_3^2 \geq 0\\
&\Leftrightarrow\; 2(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2)+2(\xi_1\xi_2+\xi_1\xi_3+\xi_2\xi_3) \geq 0\\
&\Leftrightarrow\; \xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2 \geq \xi_1\xi_2+\xi_1\xi_3+\xi_2\xi_3
\end{aligned}$$

Горњи израз увек је испуњен, пошто ће његова ЛС (као збира квадрата ξ_1^2, ξ_2^2 и ξ_3^2) увек бити *већа* (ако је барем један од коефицијената супротног предзнака од друга два) или *једнака* (ако су сви коефицјенти истог предзнака) ДС (као суме производа коефицијената).

Матрица којом се представља задати оператор $\hat{A}$ у апсолутном базису добија се његовим деловањем на векторе апсолутног базиса $\{|\mathrm{e}_1\rangle=(1,0,0), |\mathrm{e}_2\rangle=(0,1,0), |\mathrm{e}_2\rangle=(0,0,1)\}$

$$\begin{aligned}\hat{A}|\mathrm{e}_1\rangle &= \hat{A}(1,0,0)=(2\cdot 1+0+0, 1+2\cdot 0+0, 1+0+2\cdot 0)=(2,1,1)\\ \hat{A}|\mathrm{e}_2\rangle &= \hat{A}(0,1,0)=(2\cdot 0+1+0, 0+2\cdot 1+0, 0+1+2\cdot 0)=(1,2,1)\\ \hat{A}|\mathrm{e}_3\rangle &= \hat{A}(0,0,1)=(2\cdot 0+0+1, 0+2\cdot 0+1, 0+0+2\cdot 1)=(1,1,2)\end{aligned}$$

Затим се се овако добијени вектори запишу као линеарне комбинације вектора апсолутног базиса, на основу основне формуле репрезентовања, на следећи начин

$$\begin{aligned}\hat{A}|\mathrm{e}_1\rangle &= (2,1,1)=(2,0,0)+(0,1,0)+(0,0,1)=2(1,0,0)+1(0,1,0)+1(0,0,1)=2|\mathrm{e}_1\rangle+1|\mathrm{e}_2\rangle+1|\mathrm{e}_3\rangle\\ \hat{A}|\mathrm{e}_2\rangle &= (1,2,1)=(1,0,0)+(0,2,0)+(0,0,1)=1(1,0,0)+2(0,1,0)+1(0,0,1)=1|\mathrm{e}_1\rangle+2|\mathrm{e}_2\rangle+1|\mathrm{e}_3\rangle\\ \hat{A}|\mathrm{e}_3\rangle &= (1,1,2)=(1,0,0)+(0,1,0)+(0,0,2)=1(1,0,0)+1(0,1,0)+2(0,0,1)=1|\mathrm{e}_1\rangle+1|\mathrm{e}_2\rangle+2|\mathrm{e}_3\rangle\end{aligned}$$

а онда се коефицијенти у горњим развојима пишу (транспоновано!) као елементи матрице

$$\mathscr{A}=\left[\hat{A}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}.$$

Својствени проблем задатог оператора

$$\hat{A}|v\rangle=\lambda|v\rangle$$

написан у матричном облику гласи

$$\mathscr{A}\,\xi=\lambda\,\xi$$

конкретније

$$\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\xi_3\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\xi_3\end{bmatrix}$$

то јест

$$\begin{bmatrix}2-\lambda&1&1\\1&2-\lambda&1\\1&1&2-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\xi_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Да решење својственог проблема не би било тривијално, матрица ξ мора имати барем једну компоненту различиту од нуле, а то значи да детерминанта горње матрице мора бити једнака нули

$$\begin{vmatrix}2-\lambda&1&1\\1&2-\lambda&1\\1&1&2-\lambda\end{vmatrix}=0.$$

Решавањем овог израза

$$
\begin{aligned}
&(2-\lambda)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2-\lambda & 1\\ 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1 & 2-\lambda\\ 1 & 1\end{vmatrix}=0\\
&\Leftrightarrow\ (2-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda & 1\\ 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 2-\lambda\\ 1 & 1\end{vmatrix}=0\\
&\Leftrightarrow\ (2-\lambda)\left[(2-\lambda)^2-1^2\right]-(2-\lambda-1)+(1-2+\lambda)=0\\
&\Leftrightarrow\ (2-\lambda)(2-\lambda-1)(2-\lambda+1)-(2-\lambda-1)-(2-\lambda-1)=0\\
&\Leftrightarrow\ (2-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda)-2(1-\lambda)=0\\
&\Leftrightarrow\ (1-\lambda)\left[(2-\lambda)(3-\lambda)-2\right]=0\ \Leftrightarrow\ (1-\lambda)(6-3\lambda-2\lambda+\lambda^2-2)=0\\
&\Leftrightarrow\ (1-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+4)=0
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow\ \underline{\begin{cases}1-\lambda=0\\ \lambda^2-5\lambda+4=0\end{cases}}\ \Leftrightarrow\ \underline{\begin{cases}\lambda_1=1\\ \lambda_{2,3}=\dfrac{5\pm\sqrt{5^2-4\cdot 1\cdot 4}}{2\cdot 1}\end{cases}}\ \Leftrightarrow\ \underline{\begin{cases}\lambda_1=1\\ \lambda_{2,3}=\dfrac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}\end{cases}}\ \Leftrightarrow\ \underline{\begin{cases}\lambda_1=1\\ \lambda_{2,3}=\dfrac{5\pm\sqrt{9}}{2}\end{cases}}
$$

$$
\Leftrightarrow\ \underline{\begin{cases}\lambda_1=1\\ \lambda_{2,3}=\dfrac{5\pm 3}{2}\end{cases}}\ \Leftrightarrow\ \underline{\begin{cases}\lambda_1=1\\ \lambda_2=\dfrac{2}{2}\\ \lambda_3=\dfrac{8}{2}\end{cases}}\ \Leftrightarrow\ \underline{\begin{cases}\lambda_1=1\\ \lambda_2=1\\ \lambda_3=4\end{cases}}
$$

добијају се две својствене вредности матрице $\mathscr{A}$ (прва је *дегенерисана*)

$$\lambda_{1,2}=1 \text{ и } \lambda_3=4$$

којима одговарају три својствене једначине

$$
\underline{\begin{cases}\hat{A}|v_1\rangle=\lambda_1|v_1\rangle=1|v_1\rangle\\ \hat{A}|v_2\rangle=\lambda_2|v_2\rangle=1|v_2\rangle\\ \hat{A}|v_3\rangle=\lambda_3|v_3\rangle=4|v_3\rangle\end{cases}}
$$

Оне, написане у облику који одговара основној формули репрезентовања

$$
\underline{\begin{cases}\hat{A}|v_1\rangle=1|v_1\rangle+0|v_2\rangle+0|v_3\rangle\\ \hat{A}|v_2\rangle=0|v_1\rangle+1|v_2\rangle+0|v_3\rangle\\ \hat{A}|v_3\rangle=0|v_1\rangle+0|v_2\rangle+4|v_3\rangle\end{cases}}
$$

дају *дијагоналну форму* матрице, тј. матрицу оператора $\hat{A}$ у његовом својственом базису

$$\mathscr{A}_{\text{dij}}=\left[\hat{A}\right]_{\{|v_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}.$$

Знано је да се матричним изразом

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

на једноставнији начин записује систем једначина

$$\begin{cases} (2-\lambda)\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0 \\ \xi_1 + (2-\lambda)\xi_2 + \xi_3 = 0 \\ \xi_1 + \xi_2 + (2-\lambda)\xi_3 = 0 \end{cases}$$

Заменом прве (дегенерисане) својствене вредности $\lambda_{1,2} = 1$ у горњи систем следи

$$\begin{cases} (2-\lambda_{1,2})\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0 \\ \xi_1 + (2-\lambda_{1,2})\xi_2 + \xi_3 = 0 \\ \xi_1 + \xi_2 + (2-\lambda_{1,2})\xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2-1)\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0 \\ \xi_1 + (2-1)\xi_2 + \xi_3 = 0 \\ \xi_1 + \xi_2 + (2-1)\xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0 \\ \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0 \\ \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = -\xi_2 - \xi_3 \\ \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0 \\ \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \xi_1 = -\xi_2 - \xi_3 \\ -\xi_2 - \xi_3 + \xi_2 + \xi_3 = 0 \\ -\xi_2 - \xi_3 + \xi_2 + \xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = -\xi_2 - \xi_3 \\ -\xi_2 + \xi_2 = 0 \\ -\xi_3 + \xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = -\xi_2 - \xi_3 \\ 0 \cdot \xi_2 = 0 \\ 0 \cdot \xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = -\xi_2 - \xi_3 \\ \xi_2 \in \mathbb{R} \\ \xi_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Како је својствена вредност $\lambda_{1,2} = 1$ дегенерисана, њој одговара пар својствених вектора; како су ξ_2 и ξ_3 произвољни реални бројеви, прво се бира да је $\xi_2 = 1$ и $\xi_3 = 0$, те је онда $\xi_1 = -1$; први својствени вектор може се записати као матрица-колона

$$\left[|v_1\rangle\right]_{\{|v_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

или као уређена тројка

$$|v_1\rangle = (-1,1,0) .$$

Потом се узима да је $\xi_2 = 0$ и $\xi_3 = 1$, те је онда $\xi_1 = -1$; други својствени вектор дат је као матрица-колона

$$\left[|v_2\rangle\right]_{\{|v_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

или као уређена тројка

$$|v_2\rangle = (-1,0,1) .$$

Оба добијена својствена вектора одговарају дегенерисаној својственој вредности $\lambda_{1,2} = 1$.

Након замене треће својствене вредности $\lambda_3 = 4$ у горњи систем једначина следи

$$\begin{cases}(2-\lambda_3)\xi_1+\xi_2+\xi_3=0\\ \xi_1+(2-\lambda_3)\xi_2+\xi_3=0\\ \xi_1+\xi_2+(2-\lambda_3)\xi_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(2-4)\xi_1+\xi_2+\xi_3=0\\ \xi_1+(2-4)\xi_2+\xi_3=0\\ \xi_1+\xi_2+(2-4)\xi_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2\xi_1+\xi_2+\xi_3=0\\ \xi_1-2\xi_2+\xi_3=0\\ \xi_1+\xi_2-2\xi_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2\xi_1+\xi_2+\xi_3=0\\ \xi_1-2\xi_2+\xi_3=0\\ \xi_1=-\xi_2+2\xi_3\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}-2\xi_1+\xi_2+\xi_3=0\\ -\xi_2+2\xi_3-2\xi_2+\xi_3=0\\ \xi_1=-\xi_2+2\xi_3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2\xi_1+\xi_2+\xi_3=0\\ -3\xi_2+3\xi_3=0\\ \xi_1=-\xi_2+2\xi_3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2\xi_1+\xi_2+\xi_3=0\\ \xi_2=\xi_3\\ \xi_1=-\xi_2+2\xi_3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-2\xi_1+\xi_3+\xi_3=0\\ \xi_2=\xi_3\\ \xi_1=-\xi_3+2\xi_3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-2\xi_1+2\xi_3=0\\ \xi_2=\xi_3\\ \xi_1=\xi_3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-\xi_3+\xi_3=0\\ \xi_2=\xi_3\\ \xi_1=\xi_3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0\cdot\xi_3=0\\ \xi_2=\xi_3\\ \xi_1=\xi_3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\xi_1=\xi_3\\ \xi_2=\xi_3\\ \xi_3\in\mathbb{R}\end{cases}$$

Ради избегавања нултог вектора, бира се да је $\xi_3 = 1$, одакле следи да су $\xi_1 = 1$ и $\xi_2 = 1$. Онда се трећи својствени вектор, може представити било као матрица-колона

$$\left[|v_3\rangle\right]_{\{|v_i\rangle\}} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

било као уређена тројка

$$|v_3\rangle = (1,1,1)\,.$$

Овако добијени својствени вектор одговара трећој својственој вредности $\lambda_3 = 4$.

Сада треба Грам-Шмитовим поступком ортонормирати три својствена вектора

$$\left\{|v_1\rangle = (-1,1,0), |v_2\rangle = (-1,0,1), |v_3\rangle = (1,1,1)\right\}.$$

Пошто је трећи својствени вектор ортогоналан на прва два

$$\langle v_1|v_3\rangle = \langle(-1,1,0)|(1,1,1)\rangle = (-1)^*\cdot 1 + 1^*\cdot 1 + 0^*\cdot 1 = -1+1=0\,,$$

$$\langle v_2|v_3\rangle = \langle(-1,0,1)|(1,1,1)\rangle = (-1)^*\cdot 1 + 0^*\cdot 1 + 1^*\cdot 1 = -1+1=0\,,$$

док први и други то нису међусобно

$$\langle v_1|v_2\rangle = \langle(-1,1,0)|(-1,0,1)\rangle = (-1)^*\cdot(-1) + 1^*\cdot 0 + 0^*\cdot 1 = 1 \neq 0\,,$$

први и трећи могу да се *нормирају*, односно поделе сваки са својом нормом

$$|v_1\rangle^{\text{norm}} = \frac{|v_1\rangle}{\||v_1\rangle\|} = \frac{|v_1\rangle}{\sqrt{\langle v_1|v_1\rangle}} = \frac{(-1,1,0)}{\sqrt{\langle(-1,1,0)|(-1,1,0)\rangle}} = \frac{(-1,1,0)}{\sqrt{(-1)^*\cdot(-1)+1^*\cdot 1+0^*\cdot 0}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)\,,$$

$$|v_3\rangle^{\text{norm}} = \frac{|v_3\rangle}{\||v_3\rangle\|} = \frac{|v_3\rangle}{\sqrt{\langle v_3|v_3\rangle}} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{\langle(1,1,1)|(1,1,1)\rangle}} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{1^*\cdot 1+1^*\cdot 1+1^*\cdot 1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

док други треба ортонормирати на следећи начин

$$|v_2\rangle^{\text{norm}} = \frac{|v_2\rangle - {}^{\text{norm}}\langle v_1|v_2\rangle|v_1\rangle^{\text{norm}} - {}^{\text{norm}}\langle v_3|v_2\rangle|v_3\rangle^{\text{norm}}}{\left\| |v_2\rangle - {}^{\text{norm}}\langle v_1|v_2\rangle|v_1\rangle^{\text{norm}} - {}^{\text{norm}}\langle v_3|v_2\rangle|v_3\rangle^{\text{norm}} \right\|}$$

$$= \frac{(-1,0,1) - \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0) \middle| (-1,0,1) \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0) - \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \middle| (-1,0,1) \right\rangle \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)}{\left\| (-1,0,1) - \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0) \middle| (-1,0,1) \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0) - \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \middle| (-1,0,1) \right\rangle \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \right\|}$$

$$= \frac{(-1,0,1) - \frac{1}{2}\left[(-1)^* \cdot (-1) + 1^* \cdot 0 + 0^* \cdot 1\right](-1,1,0) - \frac{1}{3}\left[1^* \cdot (-1) + 1^* \cdot 0 + 1^* \cdot 1\right](1,1,1)}{\left\| (-1,0,1) - \frac{1}{2}\left[(-1)^* \cdot (-1) + 1^* \cdot 0 + 0^* \cdot 1\right](-1,1,0) - \frac{1}{3}\left[1^* \cdot (-1) + 1^* \cdot 0 + 1^* \cdot 1\right](1,1,1) \right\|}$$

$$= \frac{(-1,0,1) - \frac{1}{2}(-1,1,0) - \frac{0}{3}(1,1,1)}{\left\| (-1,0,1) - \frac{1}{2}(-1,1,0) - \frac{0}{3}(1,1,1) \right\|} = \frac{(-1,0,1) + \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)}{\left\| (-1,0,1) + \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right) \right\|} = \frac{\left(-\frac{2}{2}, 0, \frac{2}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)}{\left\| \left(-\frac{2}{2}, 0, \frac{2}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right) \right\|}$$

$$= \frac{\left(-\frac{2}{2} + \frac{1}{2}, 0 - \frac{1}{2}, \frac{2}{2} + 0\right)}{\left\| \left(-\frac{2}{2} + \frac{1}{2}, 0 - \frac{1}{2}, \frac{2}{2} + 0\right) \right\|} = \frac{\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{2}\right)}{\left\| \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{2}\right) \right\|} = \frac{\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{2}\right)}{\sqrt{\left\langle \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{2}\right) \middle| \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{2}\right) \right\rangle}}$$

$$= \frac{\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{2}\right)}{\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^* \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^* \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{2}\right)^* \cdot \frac{2}{2}}} = \frac{\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{4}{4}}} = \sqrt{\frac{4}{6}}\,\frac{1}{2}(-1,-1,2)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{6}}\,\frac{1}{2}(-1,-1,2) = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2)$$

Овим поступком добијен је потребни ортонормирани својствени базис

$$\left\{ |v_1\rangle^{\text{norm}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0), |v_2\rangle^{\text{norm}} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2), |v_3\rangle^{\text{norm}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \right\}$$

или, записано у облику матрица-колона (због изоморфизма векторског простора матрица и векторског простора уређених парова)

$$\left\{ |v_1\rangle^{\text{norm}} \to \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, |v_2\rangle^{\text{norm}} \to \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, |v_3\rangle^{\text{norm}} \to \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Ово је било неопходно урадити због *трансформације сличности*, преко које се може добити квадратни корен задатог оператора (матрице), на следећи начин

$$\mathscr{A}_{\text{dij}} = \mathscr{U}^\dagger . \mathscr{A}\,\mathscr{U} \;\Leftrightarrow\; \mathscr{U}\,\mathscr{A}_{\text{dij}} = \mathscr{U}\mathscr{U}^\dagger . \mathscr{A}\,\mathscr{U} \;.$$

Како је матрицом $\mathscr{U}$ представљен унитарни оператор $\hat{U}$, за кога важи да је $\hat{U}^{\dagger}=\hat{U}^{-1}$, то исто важи и за матрицу $\mathscr{U}^{\dagger}=\mathscr{U}^{-1}$, те ће бити

$$\mathscr{U}\mathscr{A}_{\text{dij}}=\mathscr{U}\mathscr{U}^{-1}\mathscr{A}\mathscr{U} \Leftrightarrow \mathscr{U}\mathscr{A}_{\text{dij}}=\mathscr{I}\mathscr{A}\mathscr{U} \Leftrightarrow \mathscr{U}\mathscr{A}_{\text{dij}}=\mathscr{A}\mathscr{U} \Leftrightarrow \mathscr{U}\mathscr{A}_{\text{dij}}\mathscr{U}^{-1}=\mathscr{A}\mathscr{U}\mathscr{U}^{-1}$$
$$\Leftrightarrow \mathscr{U}\mathscr{A}_{\text{dij}}\mathscr{U}^{-1}=\mathscr{A}\mathscr{I} \Leftrightarrow \mathscr{U}\mathscr{A}_{\text{dij}}\mathscr{U}^{-1}=\mathscr{A}$$

те је коначно

$$\mathscr{A}=\mathscr{U}\mathscr{A}_{\text{dij}}\mathscr{U}^{-1}$$

одакле следи да је

$$\mathscr{B}=\mathscr{U}\mathscr{B}_{\text{dij}}\mathscr{U}^{-1}$$

а како је према поставци задатка $\mathscr{B}=\sqrt{\mathscr{A}}$ и $\mathscr{B}_{\text{dij}}=\sqrt{\mathscr{A}_{\text{dij}}}$, биће

$$\sqrt{\mathscr{A}}=\mathscr{U}\sqrt{\mathscr{A}_{\text{dij}}}\,\mathscr{U}^{-1}.$$

У горњем изразу потребна је *унитарна матрица*; она настаје обједињавањем компоненти сва три својствена вектора, с тим што сва три морају имати исти коефицијент испред

$$\left\{|v_1\rangle^{\text{norm}}\to\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-\sqrt{3}\\ \sqrt{3}\\ 0\end{bmatrix},|v_2\rangle^{\text{norm}}\to\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-1\\ -1\\ 2\end{bmatrix},|v_3\rangle^{\text{norm}}\to\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\ \sqrt{2}\\ \sqrt{2}\end{bmatrix}\right\}$$

одакле се добија

$$\mathscr{U}=\left[|v_1\rangle^{\text{norm}}\middle||v_2\rangle^{\text{norm}}\middle||v_3\rangle^{\text{norm}}\right]=\frac{1}{\sqrt{6}}\left[\begin{array}{c|c|c}-\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2}\\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2}\\ 0 & 2 & \sqrt{2}\end{array}\right]=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2}\\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2}\\ 0 & 2 & \sqrt{2}\end{bmatrix};$$

матрица инверзна унитарној добија се адјунговањем, тј. транспоновањем њених врста и колона, док је комплексно коњуговање реалних матричних елемената, наравно, непотребно

$$\mathscr{U}^{-1}=\mathscr{U}^{\dagger}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2}\\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2}\\ 0 & 2 & \sqrt{2}\end{bmatrix}^{\dagger}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0\\ -1 & -1 & 2\\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2}\end{bmatrix}.$$

Сада се може израчунати корен матрице задатог оператора

$$\sqrt{\mathscr{A}}=\mathscr{U}\sqrt{\mathscr{A}_{\text{dij}}}\,\mathscr{U}^{-1}$$

на следећи начин

$$\sqrt{\mathscr{A}}=\mathscr{U}\sqrt{\mathscr{A}_{\text{dij}}}\,\mathscr{U}^{-1}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2}\\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2}\\ 0 & 2 & \sqrt{2}\end{bmatrix}\sqrt{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0\\ -1 & -1 & 2\\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2}\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}-\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2}\\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2}\\ 0 & 2 & \sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{1} & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{1} & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0\\ -1 & -1 & 2\\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2}\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}-\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2}\\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2}\\ 0 & 2 & \sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0\\ -1 & -1 & 2\\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2}\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}-\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2}\\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2}\\ 0 & 2 & \sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\cdot(-\sqrt{3})+0\cdot(-1)+0\cdot\sqrt{2} & 1\cdot\sqrt{3}+0\cdot(-1)+0\cdot\sqrt{2} & 1\cdot 0+0\cdot 2+0\cdot\sqrt{2}\\ 0\cdot(-\sqrt{3})+1\cdot(-1)+0\cdot\sqrt{2} & 0\cdot\sqrt{3}+1\cdot(-1)+0\cdot\sqrt{2} & 0\cdot 0+1\cdot 2+0\cdot\sqrt{2}\\ 0\cdot(-\sqrt{3})+0\cdot(-1)+2\cdot\sqrt{2} & 0\cdot\sqrt{3}+0\cdot(-1)+2\cdot\sqrt{2} & 0\cdot 0+0\cdot 2+2\cdot\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}-\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2}\\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2}\\ 0 & 2 & \sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0\\ -1 & -1 & 2\\ 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}(-\sqrt{3})\cdot(-\sqrt{3})+(-1)\cdot(-1)+\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2} & (-\sqrt{3})\cdot\sqrt{3}+(-1)\cdot(-1)+\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2} & (-\sqrt{3})\cdot 0+(-1)\cdot 2+\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}\\ \sqrt{3}\cdot(-\sqrt{3})+(-1)\cdot(-1)+\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2} & \sqrt{3}\cdot\sqrt{3}+(-1)\cdot(-1)+\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2} & \sqrt{3}\cdot 0+(-1)\cdot 2+\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}\\ 0\cdot(-\sqrt{3})+2\cdot(-1)+\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2} & 0\cdot\sqrt{3}+2\cdot(-1)+\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2} & 0\cdot 0+2\cdot 2+\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}3+1+4 & -3+1+4 & -2+4\\ -3+1+4 & 3+1+4 & -2+4\\ -2+4 & -2+4 & 4+4\end{bmatrix}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}8 & 2 & 2\\ 2 & 8 & 2\\ 2 & 2 & 8\end{bmatrix}=\frac{2}{6}\begin{bmatrix}4 & 1 & 1\\ 1 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}4 & 1 & 1\\ 1 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{bmatrix}=\mathscr{B}$$

На основу горе добијене матрице је јасно да се оператор $\hat{B}$, који представља корен задатог оператора

$$\hat{A}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(2\xi_1+\xi_2+\xi_3,\xi_1+2\xi_2+\xi_3,\xi_1+\xi_2+2\xi_3),$$

може дати следећом формулом

$$\hat{B}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(4\xi_1+\xi_2+\xi_3,\xi_1+4\xi_2+\xi_3,\xi_1+\xi_2+4\xi_3).$$

(в) Задати оператор $\hat{A}$ је *позитиван* ако важи израз $\left\langle v \middle| \hat{A} v \right\rangle \geq 0$. То ће сада бити проверено

$$
\begin{aligned}
& \left\langle (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \middle| \hat{A}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \right\rangle \geq 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left\langle (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \middle| (24\xi_1 + 6\xi_2 - 12\xi_3, 6\xi_1 + 33\xi_2 + 6\xi_3, -12\xi_1 + 6\xi_2 + 24\xi_3) \right\rangle \geq 0 \\
\Leftrightarrow\ & \xi_1(24\xi_1 + 6\xi_2 - 12\xi_3) + \xi_2(6\xi_1 + 33\xi_2 + 6\xi_3) + \xi_3(-12\xi_1 + 6\xi_2 + 24\xi_3) \geq 0 \\
\Leftrightarrow\ & 24\xi_1^2 + 6\xi_1\xi_2 - 12\xi_1\xi_3 + 6\xi_2\xi_1 + 33\xi_2^2 + 6\xi_2\xi_3 - 12\xi_3\xi_1 + 6\xi_3\xi_2 + 24\xi_3^2 \geq 0 \\
\Leftrightarrow\ & 24(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2) + 12(\xi_1\xi_2 + \xi_1\xi_3 + \xi_2\xi_3) \geq 0 \\
\Leftrightarrow\ & 2(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2) \geq \xi_1\xi_2 + \xi_1\xi_3 + \xi_2\xi_3
\end{aligned}
$$

Горњи израз увек је испуњен, пошто ће његова ЛС (као збира квадрата ξ_1^2, ξ_2^2 и ξ_3^2) увек бити *већа* (ако је барем један од коефицијената супротног предзнака од друга два) или *једнака* (ако су сви коефцијенти истог предзнака) ДС (као суме производа коефицијената).

Матрица којом се представља задати оператор $\hat{A}$ у апсолутном базису добија се његовим деловањем на векторе апсолутног базиса $\left\{ |\mathrm{e}_1\rangle = (1,0,0), |\mathrm{e}_2\rangle = (0,1,0), |\mathrm{e}_2\rangle = (0,0,1) \right\}$

$$
\begin{aligned}
\hat{A}|\mathrm{e}_1\rangle &= \hat{A}(1,0,0) = (24\cdot1 + 6\cdot0 - 12\cdot0, 6\cdot1 + 33\cdot0 + 6\cdot0, -12\cdot1 + 6\cdot0 + 24\cdot0) = (24, 6, -12) \\
\hat{A}|\mathrm{e}_2\rangle &= \hat{A}(0,1,0) = (24\cdot0 + 6\cdot1 - 12\cdot0, 6\cdot1 + 33\cdot1 + 6\cdot0, -12\cdot0 + 6\cdot1 + 24\cdot0) = (6, 33, 6) \\
\hat{A}|\mathrm{e}_3\rangle &= \hat{A}(0,0,1) = (24\cdot0 + 6\cdot0 - 12\cdot1, 6\cdot0 + 33\cdot0 + 6\cdot1, -12\cdot0 + 6\cdot0 + 24\cdot1) = (-12, 6, 24)
\end{aligned}
$$

Затим се се овако добијени вектори запишу као линеарне комбинације вектора апсолутног базиса, на основу основне формуле репрезентовања, на следећи начин

$$
\begin{aligned}
\hat{A}|\mathrm{e}_1\rangle &= (24, 6, -12) = 24(1,0,0) + 6(0,1,0) - 12(0,0,1) = 24|\mathrm{e}_1\rangle + 6|\mathrm{e}_2\rangle + (-12)|\mathrm{e}_3\rangle \\
\hat{A}|\mathrm{e}_2\rangle &= (6, 33, 6) = 6(1,0,0) + 33(0,1,0) + 6(0,0,1) = 6|\mathrm{e}_1\rangle + 33|\mathrm{e}_2\rangle + 6|\mathrm{e}_3\rangle \\
\hat{A}|\mathrm{e}_3\rangle &= (-12, 6, 24) = -12(1,0,0) + 6(0,1,0) + 24(0,0,1) = -12|\mathrm{e}_1\rangle + 6|\mathrm{e}_2\rangle + 24|\mathrm{e}_3\rangle
\end{aligned}
$$

а онда се коефицијенти у горњим развојима пишу (транспоновано!) као елементи матрице

$$
\mathscr{A} = \left[\hat{A}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 24 & 6 & -12 \\ 6 & 33 & 6 \\ -12 & 6 & 24 \end{bmatrix}.
$$

Својствени проблем задатог оператора

$$
\hat{A}|v\rangle = \lambda|v\rangle
$$

написан у матричном облику гласи

$$
\mathscr{A}\,\xi = \lambda\,\xi
$$

конкретније

$$
\begin{bmatrix} 24 & 6 & -12 \\ 6 & 33 & 6 \\ -12 & 6 & 24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}
$$

то јест

$$\begin{bmatrix} 24-\lambda & 6 & -12 \\ 6 & 33-\lambda & 6 \\ -12 & 6 & 24-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Да решење својственог проблема не би било тривијално, матрица ξ мора имати барем једну компоненту различиту од нуле, а то значи да детерминанта горње матрице мора бити једнака нули

$$\begin{vmatrix} 24-\lambda & 6 & -12 \\ 6 & 33-\lambda & 6 \\ -12 & 6 & 24-\lambda \end{vmatrix} = 0 .$$

Решавањем овог израза

$$(24-\lambda)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 33-\lambda & 6 \\ 6 & 24-\lambda \end{vmatrix} + 6\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 6 & 6 \\ -12 & 24-\lambda \end{vmatrix} + (-12)\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 6 & 33-\lambda \\ -12 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow\ (24-\lambda)\begin{vmatrix} 33-\lambda & 6 \\ 6 & 24-\lambda \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 6 & 6 \\ -12 & 24-\lambda \end{vmatrix} - 12\begin{vmatrix} 6 & 33-\lambda \\ -12 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow\ (24-\lambda)\left[(33-\lambda)(24-\lambda)-6^2\right] - 6\left[6(24-\lambda)+6\cdot 12\right] - 12\left[6^2+12(33-\lambda)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow\ (24-\lambda)(33-\lambda)(24-\lambda)-(24-\lambda)6^2-6^2(24-\lambda)-6^2\cdot 12-12\cdot 6^2-12^2(33-\lambda)=0$$

$$\Leftrightarrow\ (33-\lambda)(24-\lambda)^2-2(24-\lambda)6^2-2\cdot 6^2\cdot 12-12^2(33-\lambda)=0$$

$$\Leftrightarrow\ (33-\lambda)(24-\lambda)^2-(33-\lambda)12^2-2\cdot 6^2(24-\lambda)-2\cdot 6^2\cdot 12=0$$

$$\Leftrightarrow\ (33-\lambda)\left[(24-\lambda)^2-12^2\right]-2\cdot 6^2\left[(24-\lambda)+12\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\ (33-\lambda)(24-\lambda-12)(24-\lambda+12)-2\cdot 6^2(24-\lambda+12)=0$$

$$\Leftrightarrow\ (33-\lambda)(12-\lambda)(36-\lambda)-2\cdot 6^2(36-\lambda)=0 \ \Leftrightarrow\ (36-\lambda)\left[(33-\lambda)(12-\lambda)-2\cdot 36\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\ (36-\lambda)(33\cdot 12-12\lambda-33\lambda+\lambda^2-72)=0 \ \Leftrightarrow\ (36-\lambda)(396-45\lambda+\lambda^2-72)=0$$

$$\Leftrightarrow\ (36-\lambda)(\lambda^2-45\lambda+324)=0$$

$$\Rightarrow\ \begin{cases} 36-\lambda=0 \\ \lambda^2-45\lambda+324=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_3=36 \\ \lambda_{1,2}=\dfrac{45\pm\sqrt{45^2-4\cdot 1\cdot 324}}{2\cdot 1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_3=36 \\ \lambda_{1,2}=\dfrac{45\pm\sqrt{2025-1296}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\ \begin{cases} \lambda_3=36 \\ \lambda_{1,2}=\dfrac{45\pm\sqrt{729}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_3=36 \\ \lambda_{1,2}=\dfrac{45\pm 27}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_3=36 \\ \lambda_2=\dfrac{72}{2} \\ \lambda_1=\dfrac{18}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_3=36 \\ \lambda_2=36 \\ \lambda_1=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1=9 \\ \lambda_2=36 \\ \lambda_3=36 \end{cases}$$

добијају се две својствене вредности матрице $\mathscr{A}$ (другапрва је *дегенерисана*)

$$\lambda_1=9 \text{ и } \lambda_{2,3}=36$$

којима одговарају три својствене једначине

$$\begin{cases} \hat{A}|v_1\rangle = \lambda_1|v_1\rangle = 9|v_1\rangle \\ \hat{A}|v_2\rangle = \lambda_2|v_2\rangle = 36|v_2\rangle \\ \hat{A}|v_3\rangle = \lambda_3|v_3\rangle = 36|v_3\rangle \end{cases}$$

Оне, написане у облику који одговара основној формули репрезентовања

$$\begin{cases} \hat{A}|v_1\rangle = 9|v_1\rangle + 0|v_2\rangle + 0|v_3\rangle \\ \hat{A}|v_2\rangle = 0|v_1\rangle + 36|v_2\rangle + 0|v_3\rangle \\ \hat{A}|v_3\rangle = 0|v_1\rangle + 0|v_2\rangle + 36|v_3\rangle \end{cases}$$

дају *дијагоналну форму* матрице, тј. матрицу оператора $\hat{A}$ у његовом својственом базису

$$\mathscr{A}_{\text{dij}} = \left[\hat{A}\right]_{\{|v_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \end{bmatrix}.$$

Знано је да се матричним изразом

$$\begin{bmatrix} 24-\lambda & 6 & -12 \\ 6 & 33-\lambda & 6 \\ -12 & 6 & 24-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

на једноставнији начин записује систем једначина

$$\begin{cases} (24-\lambda)\xi_1 + 6\xi_2 - 12\xi_3 = 0 \\ 6\xi_1 + (33-\lambda)\xi_2 + 6\xi_3 = 0 \\ -12\xi_1 + 6\xi_2 + (24-\lambda)\xi_3 = 0 \end{cases}$$

Заменом прве својствене вредности $\lambda_1 = 9$ у горњи систем следи

$$\begin{cases} (24-\lambda_1)\xi_1 + 6\xi_2 - 12\xi_3 = 0 \\ 6\xi_1 + (33-\lambda_1)\xi_2 + 6\xi_3 = 0 \\ -12\xi_1 + 6\xi_2 + (24-\lambda_1)\xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (24-9)\xi_1 + 6\xi_2 - 12\xi_3 = 0 \\ 6\xi_1 + (33-9)\xi_2 + 6\xi_3 = 0 \\ -12\xi_1 + 6\xi_2 + (24-9)\xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15\xi_1 + 6\xi_2 - 12\xi_3 = 0 \\ 6\xi_1 + 24\xi_2 + 6\xi_3 = 0 \ \ /:4 \\ -12\xi_1 + 6\xi_2 + 15\xi_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 15\xi_1 + 6\xi_2 - 12\xi_3 = 0 \ / \cdot(-1) \\ \xi_1 + 4\xi_2 + \xi_3 = 0 \\ -12\xi_1 + 6\xi_2 + 15\xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -15\xi_1 - 6\xi_2 + 12\xi_3 = 0 \\ \xi_1 + 4\xi_2 + \xi_3 = 0 \\ -12\xi_1 + 6\xi_2 + 15\xi_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -27\xi_1 + 27\xi_3 = 0 \\ \xi_1 + 4\xi_2 + \xi_3 = 0 \\ -12\xi_1 + 6\xi_2 + 15\xi_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \xi_3 = \xi_1 \\ \xi_1 + 4\xi_2 + \xi_3 = 0 \\ -12\xi_1 + 6\xi_2 + 15\xi_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi_3 = \xi_1 \\ \xi_1 + 4\xi_2 + \xi_1 = 0 \\ -12\xi_1 + 6\xi_2 + 15\xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_3 = \xi_1 \\ 2\xi_1 + 4\xi_2 = 0 \\ -12\xi_1 + 6\xi_2 + 15\xi_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \xi_3 = -2\xi_2 \\ \xi_1 = -2\xi_2 \\ -12\xi_1 + 6\xi_2 + 15\xi_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi_3 = -2\xi_2 \\ \xi_1 = -2\xi_2 \\ 24\xi_2 + 6\xi_2 - 30\xi_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = -2\xi \\ 0 \cdot \xi_2 = 0 \\ \xi_3 = -2\xi_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = -2\xi \\ \xi_2 \in \mathbb{R} \\ \xi_3 = -2\xi_2 \end{cases}$$

Како је ξ_2 произвољан реалан број, узима се да је $\xi_2 = -1$, те су онда $\xi_1 = 2$ и $\xi_3 = 2$; први својствени вектор може се онда записати као матрица-колона

$$\big[|v_1\rangle\big]_{\{|v_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

или као уређена тројка

$$|v_1\rangle = (2,-1,2) .$$

Овако добијен својствени вектор одговара првој својственој вредности $\lambda_1 = 9$.

Након замене друге (дегенерисане) својствене вредности $\lambda_{2,3} = 36$ у горе поменути систем једначина следи

$$\begin{cases} (24-\lambda_{2,3})\xi_1 + 6\xi_2 - 12\xi_3 = 0 \\ 6\xi_1 + (33-\lambda_{2,3})\xi_2 + 6\xi_3 = 0 \\ -12\xi_1 + 6\xi_2 + (24-\lambda_{2,3})\xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (24-36)\xi_1 + 6\xi_2 - 12\xi_3 = 0 \\ 6\xi_1 + (33-36)\xi_2 + 6\xi_3 = 0 \\ -12\xi_1 + 6\xi_2 + (24-36)\xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -12\xi_1 + 6\xi_2 - 12\xi_3 = 0 \\ 6\xi_1 - 3\xi_2 + 6\xi_3 = 0 \\ -12\xi_1 + 6\xi_2 - 12\xi_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 = 0 \\ 2\xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 = 0 \\ 2\xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_2 = 2\xi_1 + 2\xi_3 \\ 2\xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 = 0 \\ 2\xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi_2 = 2\xi_1 + 2\xi_3 \\ 2\xi_1 - 2\xi_1 - 2\xi_3 + 2\xi_3 = 0 \\ 2\xi_1 - 2\xi_1 - 2\xi_3 + 2\xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_2 = 2\xi_1 + 2\xi_3 \\ 0 \cdot \xi_1 = 0 \\ 0 \cdot \xi_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \cdot \xi_1 = 0 \\ \xi_2 = 2(\xi_1 + \xi_3) \\ 0 \cdot \xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 \in \mathbb{R} \\ \xi_2 = 2(\xi_1 + \xi_3) \\ \xi_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Како је својствена вредност $\lambda_{2,3} = 36$ дегенерисана, њој ће одговарати два својствена вектора. Прво се бира да су $\xi_1 = 1$ и $\xi_3 = 0$, одакле следи да је $\xi_2 = 2$. Онда се други својствени вектор може представити било као матрица-колона

$$\big[|v_2\rangle\big]_{\{|v_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

било као уређена тројка

$$|v_2\rangle = (1,2,0) .$$

Потом се узима да је $\xi_1 = 0$ и $\xi_3 = 1$, те је онда $\xi_2 = 2$; трећи својствени вектор дат је или као матрица-колона

$$\big[|v_3\rangle\big]_{\{|v_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

или као уређена тројка

$$|v_3\rangle = (0,2,1)\,.$$

Овако добијена два својствена вектора одговарају другој својственој вредности $\lambda_{2,3} = 36$.

Сада треба Грам-Шмитовим поступком ортонормирати три својствена вектора

$$\{|v_1\rangle = (2,-1,2), |v_2\rangle = (1,2,0), |v_3\rangle = (0,2,1)\}\,.$$

Како је први својствени вектор ортогоналан на друга два

$$\langle v_1|v_2\rangle = \langle (2,-1,2)|(1,2,0)\rangle = 2^*\cdot 1 + (-1)^*\cdot 2 + 2^*\cdot 0 = 2-2 = 0\,,$$

$$\langle v_1|v_3\rangle = \langle (2,-1,2)|(0,2,1)\rangle = 2^*\cdot 0 + (-1)^*\cdot 2 + 2^*\cdot 1 = -2+2 = 0\,,$$

док други и трећи то нису међусобно

$$\langle v_2|v_3\rangle = \langle (1,2,0)|(0,2,1)\rangle = 1^*\cdot 0 + 2^*\cdot 2 + 0^*\cdot 1 = 4 \neq 0\,,$$

први и други могу да се *нормирају*, односно поделе сваки са својом нормом

$$|v_1\rangle^{\text{norm}} = \frac{|v_1\rangle}{\| |v_1\rangle \|} = \frac{|v_1\rangle}{\sqrt{\langle v_1|v_1\rangle}} = \frac{(2,-1,2)}{\sqrt{\langle (2,-1,2)|(2,-1,2)\rangle}} = \frac{(2,-1,2)}{\sqrt{2^*\cdot 2 + (-1)^*\cdot(-1) + 2^*\cdot 2}} = \frac{1}{3}(2,-1,2)\,,$$

$$|v_2\rangle^{\text{norm}} = \frac{|v_2\rangle}{\| |v_2\rangle \|} = \frac{|v_2\rangle}{\sqrt{\langle v_2|v_2\rangle}} = \frac{(1,2,0)}{\sqrt{\langle (1,2,0)|(1,2,0)\rangle}} = \frac{(1,2,0)}{\sqrt{1^*\cdot 1 + 2^*\cdot 2 + 0^*\cdot 0}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0)$$

док се трећи ортонормира на следећи начин

$$|v_3\rangle^{\text{norm}} = \frac{|v_3\rangle - {}^{\text{norm}}\langle v_1|v_3\rangle |v_1\rangle^{\text{norm}} - {}^{\text{norm}}\langle v_2|v_3\rangle |v_2\rangle^{\text{norm}}}{\left\| |v_3\rangle - {}^{\text{norm}}\langle v_1|v_3\rangle |v_1\rangle^{\text{norm}} - {}^{\text{norm}}\langle v_2|v_3\rangle |v_2\rangle^{\text{norm}} \right\|}$$

$$= \frac{(0,2,1) - \left\langle \frac{1}{3}(2,-1,2) \middle| (0,2,1) \right\rangle \frac{1}{3}(2,-1,2) - \left\langle \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0) \middle| (0,2,1) \right\rangle \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0)}{\left\| (0,2,1) - \left\langle \frac{1}{3}(2,-1,2) \middle| (0,2,1) \right\rangle \frac{1}{3}(2,-1,2) - \left\langle \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0) \middle| (0,2,1) \right\rangle \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0) \right\|}$$

$$= \frac{(0,2,1) - \frac{1}{9}\langle (2,-1,2)|(0,2,1)\rangle (2,-1,2) - \frac{1}{5}\langle (1,2,0)|(0,2,1)\rangle (1,2,0)}{\left\| (0,2,1) - \frac{1}{9}\langle (2,-1,2)|(0,2,1)\rangle (2,-1,2) - \frac{1}{5}\langle (1,2,0)|(0,2,1)\rangle (1,2,0) \right\|}$$

$$= \frac{(0,2,1) - \frac{1}{9}\left[2^*\cdot 0 + (-1)^*\cdot 2 + 2^*\cdot 1\right](2,-1,2) - \frac{1}{5}\left[1^*\cdot 0 + 2^*\cdot 2 + 0^*\cdot 1\right](1,2,0)}{\left\| (0,2,1) - \frac{1}{9}\left[2^*\cdot 0 + (-1)^*\cdot 2 + 2^*\cdot 1\right](2,-1,2) - \frac{1}{5}\left[1^*\cdot 0 + 2^*\cdot 2 + 0^*\cdot 1\right](1,2,0) \right\|}$$

$$= \frac{(0,2,1) - \frac{1}{9}(-2+2)(2,-1,2) - \frac{1}{5}4(1,2,0)}{\left\| (0,2,1) - \frac{1}{9}(-2+2)(2,-1,2) - \frac{1}{5}\sqrt{4}(1,2,0) \right\|} = \frac{(0,2,1) - \frac{0}{9}(2,-1,2) - \frac{4}{5}(1,2,0)}{\left\| (0,2,1) - \frac{0}{9}(2,-1,2) - \frac{4}{5}(1,2,0) \right\|}$$

односно

$$\left|v_3\right\rangle^{\text{norm}} = \frac{(0,2,1)-\frac{4}{5}(1,2,0)}{\left\|(0,2,1)-\frac{4}{5}(1,2,0)\right\|} = \frac{(0,2,1)-\left(\frac{4}{5},\frac{8}{5},0\right)}{\left\|(0,2,1)-\left(\frac{4}{5},\frac{8}{5},0\right)\right\|} = \frac{\left(0,\frac{10}{5},\frac{5}{5}\right)+\left(-\frac{4}{5},-\frac{8}{5},0\right)}{\left\|\left(0,\frac{10}{5},\frac{5}{5}\right)+\left(-\frac{4}{5},-\frac{8}{5},0\right)\right\|}$$

$$= \frac{\left(0-\frac{4}{5},\frac{10}{5}-\frac{8}{5},\frac{5}{5}-0\right)}{\left\|\left(0-\frac{4}{5},\frac{10}{5}-\frac{8}{5},\frac{5}{5}-0\right)\right\|} = \frac{\left(-\frac{4}{5},\frac{2}{5},\frac{5}{5}\right)}{\left\|\left(-\frac{4}{5},\frac{2}{5},\frac{5}{5}\right)\right\|} = \frac{\left(-\frac{4}{5},\frac{2}{5},\frac{5}{5}\right)}{\sqrt{\left\langle\left(-\frac{4}{5},\frac{2}{5},\frac{5}{5}\right)\middle|\left(-\frac{4}{5},\frac{2}{5},\frac{5}{5}\right)\right\rangle}}$$

$$= \frac{\left(-\frac{4}{5},\frac{2}{5},\frac{5}{5}\right)}{\sqrt{\left(-\frac{4}{5}\right)^{*}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)+\left(\frac{2}{5}\right)^{*}\cdot\frac{2}{5}+\left(\frac{5}{5}\right)^{*}\cdot\frac{5}{5}}} = \frac{\left(-\frac{4}{5},\frac{2}{5},\frac{5}{5}\right)}{\sqrt{\frac{16}{25}+\frac{4}{25}+\frac{25}{25}}} = \sqrt{\frac{25}{45}}\,\frac{1}{5}(-4,2,5)$$

$$= \frac{5}{\sqrt{9\cdot 5}}\,\frac{1}{5}(-4,2,5) = \frac{1}{\sqrt{9}\sqrt{5}}(-4,2,5) = \frac{1}{3\sqrt{5}}(-4,2,5)$$

Овим поступком добијен је потребни ортонормирани својствени базис

$$\left\{\left|v_1\right\rangle^{\text{norm}} = \frac{1}{3}(2,-1,2), \left|v_2\right\rangle^{\text{norm}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0), \left|v_3\right\rangle^{\text{norm}} = \frac{1}{3\sqrt{5}}(-4,2,5)\right\}$$

или, записано у облику матрица-колона (због изоморфизма векторског простора матрица и векторског простора уређених парова)

$$\left\{\left|v_1\right\rangle^{\text{norm}} \to \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\-1\\2\end{bmatrix}, \left|v_2\right\rangle^{\text{norm}} \to \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}, \left|v_3\right\rangle^{\text{norm}} \to \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{bmatrix}-4\\2\\5\end{bmatrix}\right\}.$$

Ово је било неопходно урадити због *трансформације сличности*, преко које се може добити квадратни корен задатог оператора (матрице), на следећи начин

$$\mathscr{A}_{\text{dij}} = \mathscr{U}^{\dagger}\mathscr{A}\,\mathscr{U} \;\Leftrightarrow\; \mathscr{U}\mathscr{A}_{\text{dij}} = \mathscr{U}\mathscr{U}^{\dagger}\mathscr{A}\,\mathscr{U}\,.$$

Како је матрицом $\mathscr{U}$ представљен унитарни оператор $\hat{U}$, за кога важи да је $\hat{U}^{\dagger} = \hat{U}^{-1}$, то исто важи и за матрицу $\mathscr{U}^{\dagger} = \mathscr{U}^{-1}$, те ће бити

$$\mathscr{U}\mathscr{A}_{\text{dij}} = \mathscr{U}\mathscr{U}^{-1}\mathscr{A}\,\mathscr{U} \;\Leftrightarrow\; \mathscr{U}\mathscr{A}_{\text{dij}} = \mathscr{I}\mathscr{A}\,\mathscr{U} \;\Leftrightarrow\; \mathscr{U}\mathscr{A}_{\text{dij}} = \mathscr{A}\,\mathscr{U} \;\Leftrightarrow\; \mathscr{U}\mathscr{A}_{\text{dij}}\mathscr{U}^{-1} = \mathscr{A}\,\mathscr{U}\mathscr{U}^{-1}$$

$$\Leftrightarrow\; \mathscr{U}\mathscr{A}_{\text{dij}}\mathscr{U}^{-1} = \mathscr{A}\,\mathscr{I} \;\Leftrightarrow\; \mathscr{U}\mathscr{A}_{\text{dij}}\mathscr{U}^{-1} = \mathscr{A}$$

те је коначно

$$\mathscr{A} = \mathscr{U}\mathscr{A}_{\text{dij}}\mathscr{U}^{-1}$$

одакле следи да је

$$\mathscr{B} = \mathscr{U}\mathscr{B}_{\text{dij}}\mathscr{U}^{-1}$$

а како је према поставци задатка $\mathscr{B} = \sqrt{\mathscr{A}}$ и $\mathscr{B}_{\text{dij}} = \sqrt{\mathscr{A}_{\text{dij}}}$, биће

$$\sqrt{\mathscr{A}}=\mathscr{U}\sqrt{\mathscr{A}_{\text{dij}}}\,\mathscr{U}^{-1}.$$

У горњем изразу потребна је *унитарна матрица*; она настаје обједињавањем компоненти сва три својствена вектора, с тим што сва три морају имати исти коефицијент испред

$$\left\{|v_1\rangle^{\text{norm}}\to\frac{1}{3\sqrt5}\begin{bmatrix}2\sqrt5\\-\sqrt5\\2\sqrt5\end{bmatrix},|v_2\rangle^{\text{norm}}\to\frac{1}{3\sqrt5}\begin{bmatrix}3\\6\\0\end{bmatrix},|v_3\rangle^{\text{norm}}\to\frac{1}{3\sqrt5}\begin{bmatrix}-4\\2\\5\end{bmatrix}\right\}$$

одакле се добија

$$\mathscr{U}=\left[|v_1\rangle^{\text{norm}}\,\middle|\,|v_2\rangle^{\text{norm}}\,\middle|\,|v_3\rangle^{\text{norm}}\right]=\frac{1}{3\sqrt5}\left[\begin{array}{c|c|c}2\sqrt5&3&-4\\-\sqrt5&6&2\\2\sqrt5&0&5\end{array}\right]=\frac{1}{3\sqrt5}\begin{bmatrix}2\sqrt5&3&-4\\-\sqrt5&6&2\\2\sqrt5&0&5\end{bmatrix};$$

матрица инверзна унитарној добија се адјунговањем, тј. транспоновањем њених врста и колона, док је комплексно коњуговање реалних матричних елемената, наравно, непотребно

$$\mathscr{U}^{-1}=\mathscr{U}^{\dagger}=\frac{1}{3\sqrt5}\begin{bmatrix}2\sqrt5&3&-4\\-\sqrt5&6&2\\2\sqrt5&0&5\end{bmatrix}^{\dagger}=\frac{1}{3\sqrt5}\begin{bmatrix}2\sqrt5&-\sqrt5&2\sqrt5\\3&6&0\\-4&2&5\end{bmatrix}.$$

Сада се може израчунати корен матрице задатог оператора

$$\sqrt{\mathscr{A}}=\mathscr{U}\sqrt{\mathscr{A}_{\text{dij}}}\,\mathscr{U}^{-1}$$

на следећи начин

$$\sqrt{\mathscr{A}}=\mathscr{U}\sqrt{\mathscr{A}_{\text{dij}}}\,\mathscr{U}^{-1}=\frac{1}{3\sqrt5}\begin{bmatrix}2\sqrt5&3&-4\\-\sqrt5&6&2\\2\sqrt5&0&5\end{bmatrix}\sqrt{\begin{bmatrix}9&0&0\\0&36&0\\0&0&36\end{bmatrix}}\frac{1}{3\sqrt5}\begin{bmatrix}2\sqrt5&-\sqrt5&2\sqrt5\\3&6&0\\-4&2&5\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{3\cdot3\cdot5}\begin{bmatrix}2\sqrt5&3&-4\\-\sqrt5&6&2\\2\sqrt5&0&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt9&0&0\\0&\sqrt{36}&0\\0&0&\sqrt{36}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\sqrt5&-\sqrt5&2\sqrt5\\3&6&0\\-4&2&5\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{3\cdot3\cdot5}\begin{bmatrix}2\sqrt5&3&-4\\-\sqrt5&6&2\\2\sqrt5&0&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&0&0\\0&6&0\\0&0&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\sqrt5&-\sqrt5&2\sqrt5\\3&6&0\\-4&2&5\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{3\cdot3\cdot5}\begin{bmatrix}2\sqrt5&3&-4\\-\sqrt5&6&2\\2\sqrt5&0&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\cdot2\sqrt5+0\cdot3+0\cdot(-4)&3\cdot(-\sqrt5)+0\cdot6+0\cdot2&3\cdot2\sqrt5+0\cdot0+0\cdot5\\0\cdot2\sqrt5+6\cdot3+0\cdot(-4)&0\cdot(-\sqrt5)+6\cdot6+0\cdot2&0\cdot2\sqrt5+6\cdot0+0\cdot5\\0\cdot2\sqrt5+0\cdot3+6\cdot(-4)&0\cdot(-\sqrt5)+0\cdot6+6\cdot2&0\cdot2\sqrt5+0\cdot0+6\cdot5\end{bmatrix}$$

или

$$\sqrt{\mathscr{A}}=\mathscr{U}\sqrt{\mathscr{A}_{\text{dij}}}\,\mathscr{U}^{-1}=\frac{1}{3\cdot3\cdot5}\begin{bmatrix}2\sqrt{5} & 3 & -4\\ -\sqrt{5} & 6 & 2\\ 2\sqrt{5} & 0 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\sqrt{5} & -3\sqrt{5} & 6\sqrt{5}\\ 6\cdot3 & 6\cdot6 & 0\\ -6\cdot4 & 6\cdot2 & 6\cdot5\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{3\cdot3\cdot5}\begin{bmatrix}2\sqrt{5}\cdot6\sqrt{5}+3\cdot6\cdot3+4\cdot6\cdot4 & -2\sqrt{5}\cdot3\sqrt{5}+3\cdot6\cdot6-4\cdot6\cdot2 & 2\sqrt{5}\cdot6\sqrt{5}+3\cdot0-4\cdot6\cdot5\\ -\sqrt{5}\cdot6\sqrt{5}+6\cdot6\cdot3-2\cdot6\cdot4 & \sqrt{5}\cdot3\sqrt{5}+6\cdot6\cdot6+2\cdot6\cdot2 & -\sqrt{5}\cdot6\sqrt{5}+6\cdot0+2\cdot6\cdot5\\ 2\sqrt{5}\cdot6\sqrt{5}+0\cdot6\cdot3-5\cdot6\cdot4 & -2\sqrt{5}\cdot3\sqrt{5}+0\cdot6\cdot6+5\cdot6\cdot2 & 2\sqrt{5}\cdot6\sqrt{5}+0\cdot0+5\cdot6\cdot5\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{3\cdot3\cdot5}\begin{bmatrix}2\cdot6\cdot5+3\cdot6\cdot3+4\cdot6\cdot4 & -2\cdot3\cdot5+3\cdot6\cdot6-4\cdot6\cdot2 & 2\cdot6\cdot5-4\cdot6\cdot5\\ -6\cdot5+6\cdot6\cdot3-2\cdot6\cdot4 & 3\cdot5+6\cdot6\cdot6+2\cdot6\cdot2 & -6\cdot5+2\cdot6\cdot5\\ 2\cdot6\cdot5-5\cdot6\cdot4 & -2\cdot3\cdot5+5\cdot6\cdot2 & 2\cdot6\cdot5+5\cdot6\cdot5\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{3\cdot3\cdot5}\begin{bmatrix}6\cdot(10+9+16) & 6\cdot(-5+18-8) & 6\cdot(10-20)\\ 6\cdot(-5+18-8) & 3\cdot5+6\cdot(36+4) & 6\cdot5\cdot(-1+2)\\ 6\cdot(10-20) & 2\cdot5\cdot(-3+6) & 6\cdot5\cdot(2+5)\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{3\cdot3\cdot5}\begin{bmatrix}6\cdot35 & 6\cdot5 & -6\cdot10\\ 6\cdot5 & 3\cdot5+6\cdot40 & 6\cdot5\cdot1\\ -6\cdot10 & 2\cdot5\cdot3 & 6\cdot5\cdot7\end{bmatrix}=\frac{1}{3\cdot3\cdot5}\begin{bmatrix}3\cdot2\cdot7\cdot5 & 3\cdot2\cdot5 & -3\cdot2\cdot5\cdot2\\ 3\cdot2\cdot5 & 3\cdot5+3\cdot2\cdot4\cdot5\cdot2 & 2\cdot5\cdot3\\ -3\cdot2\cdot5\cdot2 & 2\cdot5\cdot3 & 3\cdot2\cdot5\cdot7\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\cdot7 & 2 & -2\cdot2\\ 2 & 1+2\cdot4\cdot2 & 2\\ -2\cdot2 & 2 & 2\cdot7\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}14 & 2 & -4\\ 2 & 17 & 2\\ -4 & 2 & 14\end{bmatrix}=\mathscr{B}$$

На основу горе добијене матрице је јасно да се оператор $\hat{B}$, који представља корен задатог оператора

$$\hat{A}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(24\xi_1+6\xi_2-12\xi_3,6\xi_1+33\xi_2+6\xi_3,-12\xi_1+6\xi_2+24\xi_3)\,,$$

може дати следећом формулом

$$\hat{B}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(14\xi_1+2\xi_2-4\xi_3,2\xi_1+17\xi_2+2\xi_3,-4\xi_1+2\xi_2+14\xi_3)\,.$$

(10.13) Показати да се ниже наведеним матрицама $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ представљају *нормални оператори* у простору $\mathbb{C}^3$; такође показати да поменуте матрице комутирају, и одредити њихов *заједнички* својствени ортонормирани базис (кога морају имати пошто комутирају)

(а) $\mathscr{A}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix},\ \mathscr{B}=\begin{bmatrix}0&1&-1\\-1&0&1\\1&-1&0\end{bmatrix};$

(б) $\mathscr{A}=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}3&1&0\\1&3&0\\0&0&4\end{bmatrix},\ \mathscr{B}=\begin{bmatrix}4&1&-1\\1&4&-1\\-1&-1&4\end{bmatrix}.$

(а) Прво треба одредити матрицу *адјунговану* задатој матрици $\mathscr{A}$

$$\mathscr{A}^{\dagger}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}^{\dagger}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}=\mathscr{A}$$

Пошто је адјунгована матрица (уствари је само треба *транспоновати*, пошто су њени матрични елементи реални бројеви, значи, изменити места врста и колона) једнака полазној, то је задата матрица ермитска. Пошто су ермитски оператори подскуп нормалних оператора, матрица самим тим мора бити и нормална.

Наравно, то се може проверити и преко *дефиниционе формуле* за нормалне операторе (матрице)

$$\mathscr{A}^{\dagger}\mathscr{A}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}^{\dagger}\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}^{\dagger}=\mathscr{A}\mathscr{A}^{\dagger}.$$

Сада треба одредити матрицу адјунговану другој матрици $\mathscr{B}$

$$\mathscr{B}^{\dagger}=\begin{bmatrix}0&1&-1\\-1&0&1\\1&-1&0\end{bmatrix}^{\dagger}=\begin{bmatrix}0&-1&1\\1&0&-1\\-1&1&0\end{bmatrix}.$$

Како се ова матрица разликује од полазне $\mathscr{B}^{\dagger}\neq\mathscr{B}$, она не може бити ермитска, међутим, како су ермитске матрице подскуп нормалних, то не значи да она није нормална матрица. Стога се сада проверава *дефинициона формула* за нормалне матрице. ЛС дефиниционе формуле једнака је

$$\mathscr{B}^\dagger\mathscr{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0\cdot 0+(-1)\cdot(-1)+1\cdot 1 & 0\cdot 1+(-1)\cdot 0+1\cdot(-1) & 0\cdot(-1)+(-1)\cdot 1+1\cdot 0 \\ 1\cdot 0+0\cdot(-1)+(-1)\cdot 1 & 1\cdot 1+0\cdot 0+(-1)\cdot(-1) & 1\cdot(-1)+0\cdot 1+(-1)\cdot 0 \\ (-1)\cdot 0+1\cdot(-1)+0\cdot 1 & (-1)\cdot 1+1\cdot 0+0\cdot(-1) & (-1)\cdot(-1)+1\cdot 1+0\cdot 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

док је ДС једнака

$$\mathscr{B}\mathscr{B}^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0\cdot 0+1\cdot 1+(-1)\cdot(-1) & 0\cdot(-1)+1\cdot 0+(-1)\cdot 1 & 0\cdot 1+1\cdot(-1)+(-1)\cdot 0 \\ (-1)\cdot 0+0\cdot 1+1\cdot(-1) & (-1)\cdot(-1)+0\cdot 0+1\cdot 1 & (-1)\cdot 1+0\cdot(-1)+1\cdot 0 \\ 1\cdot 0+(-1)\cdot 1+0\cdot(-1) & 1\cdot(-1)+(-1)\cdot 0+0\cdot 1 & 1\cdot 1+(-1)\cdot(-1)+0\cdot 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Сада треба испитати да ли матрице $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ комутирају. ЛС дефиционог израза је

$$\mathscr{A}\mathscr{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0\cdot 0+1\cdot(-1)+1\cdot 1 & 0\cdot 1+1\cdot 0+1\cdot(-1) & 0\cdot(-1)+1\cdot 1+1\cdot 0 \\ 1\cdot 0+0\cdot(-1)+1\cdot 1 & 1\cdot 1+0\cdot 0+1\cdot(-1) & 1\cdot(-1)+0\cdot 1+1\cdot 0 \\ 1\cdot 0+1\cdot(-1)+0\cdot 1 & 1\cdot 1+1\cdot 0+0\cdot(-1) & 1\cdot(-1)+1\cdot 1+0\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

док је ДС једнака

$$\mathscr{B}\mathscr{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0\cdot 0+1\cdot 1+(-1)\cdot 1 & 0\cdot 1+1\cdot 0+(-1)\cdot 1 & 0\cdot 1+1\cdot 1+(-1)\cdot 0 \\ (-1)\cdot 0+0\cdot 1+1\cdot 1 & (-1)\cdot 1+0\cdot 0+1\cdot 1 & (-1)\cdot 1+0\cdot 1+1\cdot 0 \\ 1\cdot 0+(-1)\cdot 1+0\cdot 1 & 1\cdot 1+(-1)\cdot 0+0\cdot 1 & 1\cdot 1+(-1)\cdot 1+0\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

те се види да задата два оператора заиста *комутирају*, тј. да важи дефинициони израз

$$\mathscr{A}\mathscr{B} = \mathscr{B}\mathscr{A} .$$

Сада треба одредити својствене вредности матрице

$$\mathscr{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

решавањем својственог проблема

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}$$

илити

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Да решење својственог проблема не би било тривијално, матрица ξ мора имати барем једну компоненту различиту од нуле, а то значи да детерминанта горње матрице мора бити једнака нули

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 .$$

Решавањем овог израза

$$(-\lambda)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow\ (-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow\ (-\lambda)\left[\lambda^2 - 1^2\right] - (-\lambda - 1) + (1 + \lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow\ (-\lambda)(\lambda - 1)(\lambda + 1) + (\lambda + 1) + (\lambda + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow\ (-\lambda)(\lambda - 1)(\lambda + 1) + 2(\lambda + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow\ (\lambda + 1)\left[(-\lambda)(\lambda - 1) + 2\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow\ (\lambda + 1)(-\lambda^2 + \lambda + 2) = 0$$

$$\Rightarrow\ \underline{\begin{cases} \lambda + 1 = 0 \\ \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \end{cases}}\ \Leftrightarrow\ \underline{\begin{cases} \lambda_1^a = -1 \\ \lambda_{2,3}^a = \dfrac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1} \end{cases}}\ \Leftrightarrow\ \underline{\begin{cases} \lambda_1^a = -1 \\ \lambda_{2,3}^a = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} \end{cases}}\ \Leftrightarrow\ \underline{\begin{cases} \lambda_1^a = -1 \\ \lambda_{2,3}^a = \dfrac{1 \pm \sqrt{9}}{2} \end{cases}}$$

односно

$$\underline{\begin{cases}\lambda_1^a = -1\\ \lambda_{2,3}^a = \dfrac{1\pm 3}{2}\end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases}\lambda_1^a = -1\\ \lambda_2^a = \dfrac{-2}{2}\\ \lambda_3^a = \dfrac{4}{2}\end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases}\lambda_1^a = -1\\ \lambda_2^a = -1\\ \lambda_3^a = 2\end{cases}}$$

добијају се две својствене вредности матрице $\mathscr{A}$ (прва је *дегенерисана*)

$$\lambda_{1,2}^a = -1 \text{ и } \lambda_3^a = 2\,.$$

Сада треба решити својствени проблем матрице

$$\mathscr{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

конкретно записан у облику

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{bmatrix}$$

то јест

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & -1\\ -1 & -\lambda & 1\\ 1 & -1 & -\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}.$$

Да решење својственог проблема не би било тривијално, матрица ξ мора имати барем једну компоненту различиту од нуле, а то значи да детерминанта горње матрице мора бити једнака нули

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1\\ -1 & -\lambda & 1\\ 1 & -1 & -\lambda\end{vmatrix} = 0\,.$$

Решавањем горњег израза

$$(-\lambda)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -\lambda & 1\\ -1 & -\lambda\end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 1\\ 1 & -\lambda\end{vmatrix} + (-1)\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & -\lambda\\ 1 & -1\end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow\ (-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1\\ -1 & -\lambda\end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 1\\ 1 & -\lambda\end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & -\lambda\\ 1 & -1\end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow\ (-\lambda)(\lambda^2+1) - (\lambda-1) - (1+\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow\ (-\lambda)(\lambda^2+1) - \lambda + 1 - 1 - \lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow\ (-\lambda)(\lambda^2+1) - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow\ (-\lambda)(\lambda^2+1) + (-\lambda)2 = 0$$

или

$$(-\lambda)(\lambda^2+1+2)=0 \Leftrightarrow (-\lambda)(\lambda^2+3)=0$$

$$\Rightarrow \underline{\begin{cases}-\lambda=0\\ \lambda^2+3=0\end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases}\lambda_1^b=0\\ \lambda_{2,3}^b=\dfrac{-0\pm\sqrt{0^2-4\cdot1\cdot3}}{2\cdot1}\end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases}\lambda_1^b=0\\ \lambda_{2,3}^b=\dfrac{\pm\sqrt{-12}}{2}\end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases}\lambda_1^b=0\\ \lambda_{2,3}^b=\dfrac{\pm2\sqrt{-3}}{2}\end{cases}}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\begin{cases}\lambda_1^b=0\\ \lambda_{2,3}^b=\pm\sqrt{-1}\sqrt{3}\end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases}\lambda_1^b=0\\ \lambda_{2,3}^b=\pm i\sqrt{3}\end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases}\lambda_1^b=0\\ \lambda_2^b=i\sqrt{3}\\ \lambda_3^b=-i\sqrt{3}\end{cases}}$$

чиме су добијене три својствене вредности матрице $\mathscr{B}$

$$\lambda_1^b=0,\ \lambda_2^b=i\sqrt{3}\ \text{и}\ \lambda_3^b=-i\sqrt{3}.$$

Из матричног израза

$$\begin{bmatrix}-\lambda & 1 & -1\\ -1 & -\lambda & 1\\ 1 & -1 & -\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

којим се на једноставнији начин записује систем једначина

$$\underline{\begin{cases}-\lambda\xi_1+\xi_2-\xi_3=0\\ -\xi_1-\lambda\xi_2+\xi_3=0\\ \xi_1-\xi_2-\lambda\xi_3=0\end{cases}}$$

добијају се својствени вектори замењивањем добијених својствених вредности.

Прво се у горњи систем убацује својствена вредност $\lambda_1^b=0$

$$\underline{\begin{cases}-\lambda_1^b\xi_1+\xi_2-\xi_3=0\\ -\xi_1-\lambda_1^b\xi_2+\xi_3=0\\ \xi_1-\xi_2-\lambda_1^b\xi_3=0\end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases}0\cdot\xi_1+\xi_2-\xi_3=0\\ -\xi_1-0\cdot\xi_2+\xi_3=0\\ \xi_1-\xi_2-0\cdot\xi_3=0\end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases}\xi_2-\xi_3=0\\ -\xi_1+\xi_3=0\\ \xi_1-\xi_2=0\end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases}\xi_2=\xi_3\\ -\xi_1+\xi_3=0\\ \xi_1=\xi_2\end{cases}} \Rightarrow \underline{\begin{cases}\xi_2=\xi_3\\ -\xi_1+\xi_3=0\\ \xi_1=\xi_3\end{cases}}$$

$$\Rightarrow \underline{\begin{cases}\xi_2=\xi_3\\ -\xi_3+\xi_3=0\\ \xi_1=\xi_3\end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases}\xi_2=\xi_3\\ 0\cdot\xi_3=0\\ \xi_1=\xi_3\end{cases}} \Rightarrow \underline{\begin{cases}\xi_2=\xi_3\\ \xi_3\in\mathbb{R}\\ \xi_1=\xi_3\end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases}\xi_1=\xi_3\\ \xi_2=\xi_3\\ \xi_3\in\mathbb{R}\end{cases}}$$

Да би се својствени вектор разликовао од нултог вектора који представља тривијално решење својственог проблема, узима се да је $\xi_3=1$, те су онда $\xi_1=1$ и $\xi_2=1$; први својствени вектор може се записати као матрица-колона

$$\left[|v_1\rangle\right]_{\{|e_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

или као уређена тројка

$$|v_1\rangle = (1,1,1)\,.$$

Овако добијени својствени вектор одговара првој својственој вредности $\lambda_1^b = 0$.

Након замене друге својствене вредности $\lambda_2^b = i\sqrt{3}$ у раније поменути систем једначина следи

$$\begin{cases} -\lambda_2^b\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 = 0 \\ -\xi_1 - \lambda_2^b\xi_2 + \xi_3 = 0 \\ \xi_1 - \xi_2 - \lambda_2^b\xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -i\sqrt{3}\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 = 0 \\ -\xi_1 - i\sqrt{3}\xi_2 + \xi_3 = 0 \\ \xi_1 - \xi_2 - i\sqrt{3}\xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_3 = -i\sqrt{3}\xi_1 + \xi_2 \\ -\xi_1 - i\sqrt{3}\xi_2 + \xi_3 = 0 \\ \xi_1 - \xi_2 - i\sqrt{3}\xi_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \xi_3 = -i\sqrt{3}\xi_1 + \xi_2 \\ -\xi_1 - i\sqrt{3}\xi_2 - i\sqrt{3}\xi_1 + \xi_2 = 0 \\ \xi_1 - \xi_2 - i\sqrt{3}\xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_3 = -i\sqrt{3}\xi_1 + \xi_2 \\ -(1+i\sqrt{3})\xi_1 + (1-i\sqrt{3})\xi_2 = 0 \\ \xi_1 - \xi_2 - i\sqrt{3}\xi_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \xi_3 = -i\sqrt{3}\xi_1 + \xi_2 \\ \xi_2 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\xi_1 \\ \xi_1 - \xi_2 - i\sqrt{3}\xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_3 = -i\sqrt{3}\xi_1 + \xi_2 \\ \xi_2 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}\xi_1 \\ \xi_1 - \xi_2 - i\sqrt{3}\xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_3 = -i\sqrt{3}\xi_1 + \xi_2 \\ \xi_2 = \dfrac{(1+i\sqrt{3})^2}{1-3i^2}\xi_1 \\ \xi_1 - \xi_2 - i\sqrt{3}\xi_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \xi_3 = -i\sqrt{3}\xi_1 + \xi_2 \\ \xi_2 = \dfrac{1+2i\sqrt{3}+3i^2}{1+3}\xi_1 \\ \xi_1 - \xi_2 - i\sqrt{3}\xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_3 = -i\sqrt{3}\xi_1 + \xi_2 \\ \xi_2 = \dfrac{1+2i\sqrt{3}-3}{4}\xi_1 \\ \xi_1 - \xi_2 - i\sqrt{3}\xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_3 = -i\sqrt{3}\xi_1 + \xi_2 \\ \xi_2 = \dfrac{-2+2i\sqrt{3}}{4}\xi_1 \\ \xi_1 - \xi_2 - i\sqrt{3}\xi_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \xi_3 = -i\sqrt{3}\xi_1 + \xi_2 \\ \xi_2 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\xi_1 \\ \xi_1 - \xi_2 - i\sqrt{3}\xi_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi_3 = -i\sqrt{3}\xi_1 + \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\xi_1 \\ \xi_2 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\xi_1 \\ \xi_1 - \xi_2 - i\sqrt{3}\xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_3 = \left(-i\sqrt{3} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)\xi_1 \\ \xi_2 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\xi_1 \\ \xi_1 - \xi_2 - i\sqrt{3}\xi_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \xi_3 = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\xi_1 \\ \xi_2 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\xi_1 \\ \xi_1 - \xi_2 - i\sqrt{3}\xi_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi_3 = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\xi_1 \\ \xi_2 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\xi_1 \\ \xi_1 - \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\xi_1 - i\sqrt{3}\,\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\xi_1 = 0 \end{cases}$$

односно

$$\begin{cases}\xi_3 = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\xi_1 \\ \xi_2 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\xi_1 \\ \left(1+\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i\sqrt{3}+3i^2}{2}\right)\xi_1 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\xi_3 = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\xi_1 \\ \xi_2 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\xi_1 \\ \dfrac{2+1-i\sqrt{3}+i\sqrt{3}-3}{2}\xi_1 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\xi_3 = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\xi_1 \\ \xi_2 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\xi_1 \\ 0\cdot\xi_1 = 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\xi_3 = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\xi_1 \\ \xi_2 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\xi_1 \\ \xi_1 \in \mathbb{R}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\xi_1 \in \mathbb{R} \\ \xi_2 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\xi_1 \\ \xi_3 = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\xi_1\end{cases}$$

Ради избегавања нултог вектора, бира се да је $\xi_1 = 1$, одакле следи да су $\xi_2 = (-1+i\sqrt{3})/2$ и $\xi_3 = (-1-i\sqrt{3})/2$. Онда се други својствени вектор може представити било као матрица-колона

$$\left[|v_2\rangle\right]_{\{|e_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$$

било као уређена тројка

$$|v_2\rangle = \left(1, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right).$$

Овако добијени својствени вектор одговара другој својственој вредности $\lambda_2^b = i\sqrt{3}$.

На крају, у раније поменути систем једначина се мења трећа својствена вредност $\lambda_3^b = -i\sqrt{3}$

$$\begin{cases}-\lambda_3^b\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 = 0 \\ -\xi_1 - \lambda_3^b\xi_2 + \xi_3 = 0 \\ \xi_1 - \xi_2 - \lambda_3^b\xi_3 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}i\sqrt{3}\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 = 0 \\ -\xi_1 + i\sqrt{3}\xi_2 + \xi_3 = 0 \\ \xi_1 - \xi_2 + i\sqrt{3}\xi_3 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\xi_3 = i\sqrt{3}\xi_1 + \xi_2 \\ -\xi_1 + i\sqrt{3}\xi_2 + \xi_3 = 0 \\ \xi_1 - \xi_2 + i\sqrt{3}\xi_3 = 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\xi_3 = i\sqrt{3}\xi_1 + \xi_2 \\ -\xi_1 + i\sqrt{3}\xi_2 + i\sqrt{3}\xi_1 + \xi_2 = 0 \\ \xi_1 - \xi_2 + i\sqrt{3}\xi_3 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\xi_3 = i\sqrt{3}\xi_1 + \xi_2 \\ (-1+i\sqrt{3})\xi_1 + (1+i\sqrt{3})\xi_2 = 0 \\ \xi_1 - \xi_2 + i\sqrt{3}\xi_3 = 0\end{cases}$$

илити

$$\begin{cases} \xi_3 = i\sqrt{3}\xi_1 + \xi_2 \\ \xi_2 = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}\xi_1 \\ \xi_1 - \xi_2 + i\sqrt{3}\xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_3 = i\sqrt{3}\xi_1 + \xi_2 \\ \xi_2 = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\xi_1 \\ \xi_1 - \xi_2 + i\sqrt{3}\xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_3 = i\sqrt{3}\xi_1 + \xi_2 \\ \xi_2 = \dfrac{(1-i\sqrt{3})^2}{1-3i^2}\xi_1 \\ \xi_1 - \xi_2 + i\sqrt{3}\xi_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \xi_3 = i\sqrt{3}\xi_1 + \xi_2 \\ \xi_2 = \dfrac{1-2i\sqrt{3}+3i^2}{1+3}\xi_1 \\ \xi_1 - \xi_2 + i\sqrt{3}\xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_3 = i\sqrt{3}\xi_1 + \xi_2 \\ \xi_2 = \dfrac{1-2i\sqrt{3}-3}{4}\xi_1 \\ \xi_1 - \xi_2 + i\sqrt{3}\xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_3 = i\sqrt{3}\xi_1 + \xi_2 \\ \xi_2 = \dfrac{-2-2i\sqrt{3}}{4}\xi_1 \\ \xi_1 - \xi_2 + i\sqrt{3}\xi_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \xi_3 = i\sqrt{3}\xi_1 + \xi_2 \\ \xi_2 = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\xi_1 \\ \xi_1 - \xi_2 + i\sqrt{3}\xi_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi_3 = i\sqrt{3}\xi_1 + \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\xi_1 \\ \xi_2 = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\xi_1 \\ \xi_1 - \xi_2 + i\sqrt{3}\xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_3 = \left(i\sqrt{3} - \dfrac{1}{2} - \dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)\xi_1 \\ \xi_2 = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\xi_1 \\ \xi_1 - \xi_2 + i\sqrt{3}\xi_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \xi_3 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\xi_1 \\ \xi_2 = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\xi_1 \\ \xi_1 - \xi_2 + i\sqrt{3}\xi_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi_3 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\xi_1 \\ \xi_2 = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\xi_1 \\ \xi_1 - \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\xi_1 + i\sqrt{3}\,\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\xi_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \xi_3 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\xi_1 \\ \xi_2 = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\xi_1 \\ \left(1 + \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} + \dfrac{-i\sqrt{3}+3i^2}{2}\right)\xi_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_3 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\xi_1 \\ \xi_2 = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\xi_1 \\ \dfrac{2+1+i\sqrt{3}-i\sqrt{3}-3}{2}\xi_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_3 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\xi_1 \\ \xi_2 = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\xi_1 \\ 0 \cdot \xi_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \xi_3 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\xi_1 \\ \xi_2 = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\xi_1 \\ \xi_1 \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 \in \mathbb{R} \\ \xi_2 = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\xi_1 \\ \xi_3 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\xi_1 \end{cases}$$

Ради избегавања нултог вектора, бира се да је $\xi_1 = 1$, одакле следи да су $\xi_2 = (-1-i\sqrt{3})/2$ и $\xi_3 = (-1+i\sqrt{3})/2$. Онда се трећи својствени вектор може представити било као матрица-колона

$$\left[\left|v_3\right\rangle\right]_{\{|e_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

било као уређена тројка

$$\left|v_3\right\rangle = \left(1, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right).$$

Овако добијени својствени вектор одговара трећој својственој вредности $\lambda_3^b = -i\sqrt{3}$.

Сада треба Грам-Шмитовим поступком ортонормирати добијене својствене векторе

$$\left\{\left|v_1\right\rangle = (1,1,1), \left|v_2\right\rangle = \left(1, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right), \left|v_3\right\rangle = \left(1, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\right\}.$$

Ипак, пошто су сва три вектора међусобно ортогонална

$$\begin{aligned}
\left\langle v_1 \middle| v_2\right\rangle &= \left\langle (1,1,1) \middle| \left(1, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)\right\rangle \\
&= 1^* \cdot 1 + 1^* \cdot \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} + 1^* \cdot \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle v_1 \middle| v_3\right\rangle &= \left\langle (1,1,1) \middle| \left(1, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\right\rangle \\
&= 1^* \cdot 1 + 1^* \cdot \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} + 1^* \cdot \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle v_2 \middle| v_3\right\rangle &= \left\langle \left(1, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right) \middle| \left(1, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\right\rangle \\
&= 1^* \cdot 1 + \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^* \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^* \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\
&= 1 + \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\,\frac{-1-i\sqrt{3}}{2} + \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\,\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\
&= 1 + \frac{(-1-i\sqrt{3})(-1-i\sqrt{3})}{4} + \frac{(-1+i\sqrt{3})(-1+i\sqrt{3})}{4} \\
&= 1 + \frac{1-2i\sqrt{3}+3i^2}{4} + \frac{1+2i\sqrt{3}+3i^2}{4} = 1 + \frac{1-2i\sqrt{3}-3+1+2i\sqrt{3}-3}{4} \\
&= 1 + \frac{2-6}{4} = 1 - \frac{4}{4} = 1 - 1 = 0
\end{aligned}$$

довољно их је *нормирати* - односно поделити сваки са својом нормом

$$|v_1\rangle^{\text{norm}} = \frac{|v_1\rangle}{\||v_1\rangle\|} = \frac{|v_1\rangle}{\sqrt{\langle v_1|v_1\rangle}} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{\langle(1,1,1)|(1,1,1)\rangle}} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{1^*\cdot 1+1^*\cdot 1+1^*\cdot 1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

$$|v_2\rangle^{\text{norm}} = \frac{|v_2\rangle}{\||v_2\rangle\|} = \frac{|v_2\rangle}{\sqrt{\langle v_2|v_2\rangle}} = \frac{\left(1,\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)}{\sqrt{\left\langle\left(1,\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)\middle|\left(1,\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)\right\rangle}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1^*\cdot 1+\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^*\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^*\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}}}\left(1,\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}+\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}}}\left(1,\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{(-1-i\sqrt{3})(-1+i\sqrt{3})}{4}+\frac{(-1+i\sqrt{3})(-1-i\sqrt{3})}{4}}}\left(1,\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{\left(1,\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)}{\sqrt{1+2\frac{(-1)^2-(i\sqrt{3})^2}{4}}} = \frac{\left(1,\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)}{\sqrt{1+\frac{1-3i^2}{2}}} = \frac{\left(1,\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)}{\sqrt{\frac{2}{2}+\frac{1+3}{2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{6}{2}}}\left(1,\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1,\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$|v_3\rangle^{\text{norm}} = \frac{|v_3\rangle}{\||v_3\rangle\|} = \frac{|v_3\rangle}{\sqrt{\langle v_3|v_3\rangle}} = \frac{\left(1,\frac{-1-i\sqrt{3}}{2},\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)}{\sqrt{\left\langle\left(1,\frac{-1-i\sqrt{3}}{2},\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\middle|\left(1,\frac{-1-i\sqrt{3}}{2},\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\right\rangle}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1^*\cdot 1+\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^*\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^*\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}}}\left(1,\frac{-1-i\sqrt{3}}{2},\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}+\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}}}\left(1,\frac{-1-i\sqrt{3}}{2},\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)$$

то јест

$$|v_3\rangle^{\text{norm}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{(-1+i\sqrt{3})(-1-i\sqrt{3})}{4}+\frac{(-1-i\sqrt{3})(-1+i\sqrt{3})}{4}}}\left(1,\frac{-1-i\sqrt{3}}{2},\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=\frac{\left(1,\frac{-1-i\sqrt{3}}{2},\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)}{\sqrt{1+2\frac{(-1)^2-(i\sqrt{3})^2}{4}}}=\frac{\left(1,\frac{-1-i\sqrt{3}}{2},\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)}{\sqrt{1+\frac{1-3i^2}{2}}}=\frac{\left(1,\frac{-1-i\sqrt{3}}{2},\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)}{\sqrt{\frac{2}{2}+\frac{1+3}{2}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\frac{6}{2}}}\left(1,\frac{-1-i\sqrt{3}}{2},\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1,\frac{-1-i\sqrt{3}}{2},\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)$$

чиме је добијен скуп ортонормираних својствених вектора матрице $\mathscr{B}$

$$\left\{|v_1\rangle^{\text{norm}}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),|v_2\rangle^{\text{norm}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1,\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right),|v_3\rangle^{\text{norm}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1,\frac{-1-i\sqrt{3}}{2},\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$$

или, у облику матрица-колона

$$\left\{\left[|v_1\rangle\right]_{|\mathrm{e}_i\rangle}^{\text{norm}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\left[|v_2\rangle\right]_{|\mathrm{e}_i\rangle}^{\text{norm}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\\\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix},\left[|v_3\rangle\right]_{|\mathrm{e}_i\rangle}^{\text{norm}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\\\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}\right\}.$$

Овакав скуп би требало да истовремено, будући да је показано да матрице $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ комутирају, буду и својствени вектори матрице $\mathscr{A}$, што се проверава испитивањем да ли је својствени проблем матрице $\mathscr{A}$ задовољен за добијена три својствена вектора матрице $\mathscr{B}$. Поменута провера обавља се за први

$$\mathscr{A}\left[|v_1\rangle\right]_{|\mathrm{e}_i\rangle}^{\text{norm}}=\lambda_1^a\left[|v_1\rangle\right]_{|\mathrm{e}_i\rangle}^{\text{norm}}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}_{3\times3}\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}_{3\times1}=2\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}_{3\times1}$$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}_{3\times1}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}_{3\times1}=\begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix}_{3\times1}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}0\cdot1+1\cdot1+1\cdot1\\1\cdot1+0\cdot1+1\cdot1\\1\cdot1+1\cdot1+0\cdot1\end{bmatrix}_{3\times1}=\begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix}_{3\times1}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix}_{3\times1}=\begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix}_{3\times1}$$

потом за други

$$\mathscr{A}\left[|v_2\rangle\right]^{\text{norm}}_{|\mathrm{e}_i\rangle} = \lambda_2^a \left[|v_2\rangle\right]^{\text{norm}}_{|\mathrm{e}_i\rangle} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{3\times3} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}_{3\times1} = (-1)\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}_{3\times1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{3\times1} \begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}_{3\times1} = \begin{bmatrix} -1 \\ -\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\ -\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}_{3\times1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0\cdot1+1\cdot\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}+1\cdot\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} \\ 1\cdot1+0\cdot\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}+1\cdot\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} \\ 1\cdot1+1\cdot\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}+0\cdot\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}_{3\times1} = \begin{bmatrix} -1 \\ \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}_{3\times1} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}+\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} \\ 1+\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} \\ 1+\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}_{3\times1} = \begin{bmatrix} -1 \\ \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}_{3\times1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{-1+i\sqrt{3}-1-i\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{2-1-i\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{2-1+i\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}_{3\times1} = \begin{bmatrix} -1 \\ \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}_{3\times1} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -\dfrac{2}{2} \\ \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}_{3\times1} = \begin{bmatrix} -1 \\ \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}_{3\times1}$$

и на крају за трећи својствени вектор

$$\mathscr{A}\left[|v_3\rangle\right]^{\text{norm}}_{|\mathrm{e}_i\rangle} = \lambda_3^a \left[|v_3\rangle\right]^{\text{norm}}_{|\mathrm{e}_i\rangle} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{3\times3} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}_{3\times1} = (-1)\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}_{3\times1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{3\times1} \begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}_{3\times1} = \begin{bmatrix} -1 \\ -\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} \\ -\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}_{3\times1}$$

или

$$\mathscr{A}\left[|v_3\rangle\right]_{|\mathrm{e}_i\rangle}^{\mathrm{norm}}=\lambda_3^a\left[|v_3\rangle\right]_{|\mathrm{e}_i\rangle}^{\mathrm{norm}} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0\cdot 1+1\cdot\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}+1\cdot\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\ 1\cdot 1+0\cdot\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}+1\cdot\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\ 1\cdot 1+1\cdot\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}+0\cdot\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}_{3\times 1}=\begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}+\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\ 1+\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\ 1+\frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}_{3\times 1}=\begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{-1-i\sqrt{3}-1+i\sqrt{3}}{2} \\ \frac{2-1+i\sqrt{3}}{2} \\ \frac{2-1-i\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}_{3\times 1}=\begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}_{3\times 1} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -\frac{2}{2} \\ \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}_{3\times 1}=\begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

Како својствени вектори матрице $\mathscr{B}$ задовољавају својствени проблем матрице $\mathscr{A}$ за све три њене својствене вредности, то обе матрице имају заједнички својствени базис.

Након свега, преостало је само изразити другу и трећу комплексну компоненту својствених вектора $|v_2\rangle^{\mathrm{norm}}$ и $|v_3\rangle^{\mathrm{norm}}$ дате у свом алгебарском облику у експоненцијалном облику. У том циљу користи се знана *Ојлерова формула*

$$\mathrm{e}^{\pm i\theta}=\cos\theta\pm i\sin\theta$$

записана прво за угао $2\pi/3$

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}} &= \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right) \\
&= \left[\cos\pi\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sin\pi\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]+i\left[\sin\pi\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-\cos\pi\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] \\
&= \cos\pi\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sin\pi\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\pi\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-i\cos\pi\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
&= (\cos\pi+i\sin\pi)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+(\sin\pi-i\cos\pi)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
&= (-1+i\cdot 0)\frac{1}{2}+\left[0-i(-1)\right]\frac{\sqrt{3}}{2}=(-1)\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

а потом за угао од $-2\pi/3$

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{3}} &= \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{3\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right) \\
&= \left[\cos\pi\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\pi\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] - i\left[\sin\pi\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos\pi\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] \\
&= \cos\pi\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\pi\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\pi\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\cos\pi\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
&= (\cos\pi - i\sin\pi)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + (\sin\pi + i\cos\pi)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
&= (-1-i\cdot 0)\frac{1}{2} + \left[0+i(-1)\right]\frac{\sqrt{3}}{2} = (-1)\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

Јасно је одавде да се вектори својственог базиса заједничког за матрице $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ могу записати као

$$\left\{ |v_1\rangle^{\text{norm}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), |v_2\rangle^{\text{norm}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1, \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}, \mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{3}}\right), |v_3\rangle^{\text{norm}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1, \mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{3}}, \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}\right) \right\}$$

или, у свом матричном облику

$$\left\{ \left[|v_1\rangle\right]_{|\mathrm{e}_i\rangle}^{\text{norm}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \left[|v_2\rangle\right]_{|\mathrm{e}_i\rangle}^{\text{norm}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\ \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}} \\ \mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{3}}\end{bmatrix}, \left[|v_3\rangle\right]_{|\mathrm{e}_i\rangle}^{\text{norm}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\ \mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{3}} \\ \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}\end{bmatrix} \right\}.$$

(б) Прво треба одредити матрице *адјунговане* задатим матрицама $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$

$$\mathscr{A}^\dagger = \begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}^\dagger = \begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix} = \mathscr{A},$$

$$\mathscr{B}^\dagger = \begin{bmatrix}4 & 1 & -1\\ 1 & 4 & -1\\ -1 & -1 & 4\end{bmatrix}^\dagger = \begin{bmatrix}4 & 1 & -1\\ 1 & 4 & -1\\ -1 & -1 & 4\end{bmatrix} = \mathscr{B}.$$

Будући да су адјунговане матрице (уствари само *транспоноване*, пошто им матрични елементи реални бројеви, значи, измењена су само места врста и колона) једнаке полазнима, то су обе задате матрице *ермитске*. Пошто су ермитски оператори подскуп нормалних оператора, обе матрице самим тим морају бити и *нормалне*.

Сада се испитује да ли матрице $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ комутирају међусобно. ЛС дефиционог израза је

$$\mathscr{A}\mathscr{B}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3&1&0\\1&3&0\\0&0&4\end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix}4&1&-1\\1&4&-1\\-1&-1&4\end{bmatrix}$$
$$=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}3\cdot4+1\cdot1+0\cdot(-1)&3\cdot1+1\cdot4+0\cdot(-1)&3\cdot(-1)+1\cdot(-1)+0\cdot4\\1\cdot4+3\cdot1+0\cdot(-1)&1\cdot1+3\cdot4+0\cdot(-1)&1\cdot(-1)+3\cdot(-1)+0\cdot4\\0\cdot4+0\cdot1+4\cdot(-1)&0\cdot1+0\cdot4+4\cdot(-1)&0\cdot(-1)+0\cdot(-1)+4\cdot4\end{bmatrix}$$
$$=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}13&7&-4\\7&13&-4\\-4&-4&16\end{bmatrix}$$

док је ДС једнака

$$\mathscr{B}\mathscr{A}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}4&1&-1\\1&4&-1\\-1&-1&4\end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3&1&0\\1&3&0\\0&0&4\end{bmatrix}$$
$$=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}4\cdot3+1\cdot1+(-1)\cdot0&4\cdot1+1\cdot3+(-1)\cdot0&4\cdot0+1\cdot0+(-1)\cdot4\\1\cdot3+4\cdot1+(-1)\cdot0&1\cdot1+4\cdot3+(-1)\cdot0&1\cdot0+4\cdot0+(-1)\cdot4\\(-1)\cdot3+(-1)\cdot1+4\cdot0&(-1)\cdot1+(-1)\cdot3+4\cdot0&(-1)\cdot0+(-1)\cdot0+4\cdot4\end{bmatrix}$$
$$=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}13&7&-4\\7&13&-4\\-4&-4&16\end{bmatrix}$$

те је очигледно да задата два оператора заиста *комутирају*, тј. да важи дефинициони израз

$$\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{B}\mathscr{A}\,.$$

Ред је да се одреде *својствене вредности* за сваку од датих матрица. За прву матрицу

$$\mathscr{A}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3&1&0\\1&3&0\\0&0&4\end{bmatrix}$$

својствени проблем гласи

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3&1&0\\1&3&0\\0&0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\xi_3\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\xi_3\end{bmatrix}\quad \text{тј.}\quad \begin{bmatrix}\frac{3}{2}-\lambda&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&\frac{3}{2}-\lambda&0\\0&0&\frac{4}{2}-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\xi_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Да решење својственог проблема не би било тривијално, матрица ξ мора имати барем једну компоненту различиту од нуле, а то значи да детерминанта горње матрице мора бити једнака нули

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{2}-\lambda & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2}-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{2}-\lambda \end{vmatrix} = 0 .$$

Решавањем горњег израза

$$0\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2}-\lambda \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} \frac{3}{2}-\lambda & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + (2-\lambda)\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} \frac{3}{2}-\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow\ (2-\lambda)\begin{vmatrix} \frac{3}{2}-\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \ \Leftrightarrow\ (2-\lambda)\left[\left(\frac{3}{2}-\lambda\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow\ (2-\lambda)\left(\frac{3}{2}-\lambda-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}-\lambda+\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow\ (2-\lambda)\left(\frac{2}{2}-\lambda\right)\left(\frac{4}{2}-\lambda\right) = 0 \ \Leftrightarrow\ (2-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow\ (1-\lambda)(2-\lambda)(2-\lambda) = 0\cdot 0\cdot 0 \ \Rightarrow \underline{\begin{cases} 1-\lambda = 0 \\ 2-\lambda = 0 \\ 2-\lambda = 0 \end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} \lambda_1^a = 1 \\ \lambda_2^a = 2 \\ \lambda_3^a = 2 \end{cases}}$$

добијају се две својствене вредности матрице $\mathscr{A}$ (друга је *дегенерисана*)

$$\lambda_1^a = 1 \text{ и } \lambda_{2,3}^a = 2 .$$

Сада треба добити својствене вредности друге матрице

$$\mathscr{B} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

чији конкретно записан својствени проблем гласи

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} \quad \text{тј.} \quad \begin{bmatrix} \frac{4}{3}-\lambda & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3}-\lambda & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3}-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Да решење својственог проблема не би било тривијално, матрица ξ мора имати барем једну компоненту различиту од нуле, а то значи да детерминанта горње матрице мора бити једнака нули

$$\begin{vmatrix} \frac{4}{3}-\lambda & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3}-\lambda & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3}-\lambda \end{vmatrix} = 0 .$$

Решавањем горњег израза

$$\left(\frac{4}{3}-\lambda\right)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} \frac{4}{3}-\lambda & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3}-\lambda \end{vmatrix} + \frac{1}{3}\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3}-\lambda \end{vmatrix} + \left(-\frac{1}{3}\right)\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{3}-\lambda \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}-\lambda\right)\begin{vmatrix} \frac{4}{3}-\lambda & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3}-\lambda \end{vmatrix} - \frac{1}{3}\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3}-\lambda \end{vmatrix} - \frac{1}{3}\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{3}-\lambda \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}-\lambda\right)\left[\left(\frac{4}{3}-\lambda\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]-\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}-\lambda\right)-\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]-\frac{1}{3}\left[-\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}-\lambda\right)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}-\lambda\right)\left(\frac{4}{3}-\lambda-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{3}-\lambda+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{9}\left(\frac{4}{3}-\lambda-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{9}\left(\frac{4}{3}-\lambda-\frac{1}{3}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}-\lambda\right)\left(\frac{3}{3}-\lambda\right)\left(\frac{5}{3}-\lambda\right)-\frac{1}{9}\left(\frac{3}{3}-\lambda\right)-\frac{1}{9}\left(\frac{3}{3}-\lambda\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}-\lambda\right)(1-\lambda)\left(\frac{5}{3}-\lambda\right)-\frac{2}{9}(1-\lambda)=0 \;\Leftrightarrow\; (1-\lambda)\left[\left(\frac{4}{3}-\lambda\right)\left(\frac{5}{3}-\lambda\right)-\frac{2}{9}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{3}-\frac{5}{3}\lambda-\frac{4}{3}\lambda+\lambda^2-\frac{2}{9}\right)=0 \;\Leftrightarrow\; (1-\lambda)\left(\frac{20}{9}-\frac{9}{3}\lambda+\lambda^2-\frac{2}{9}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)\left(\frac{18}{9}-\frac{9}{3}\lambda+\lambda^2\right)=0 \;\Leftrightarrow\; (1-\lambda)(\lambda^2-3\lambda+2)=0$$

$$\Rightarrow \underline{\begin{cases} 1-\lambda=0 \\ \lambda^2-3\lambda+2=0 \end{cases}} \;\Leftrightarrow\; \underline{\begin{cases} \lambda_1^b=1 \\ \lambda_{2,3}^b=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot1\cdot2}}{2\cdot1} \end{cases}} \;\Leftrightarrow\; \underline{\begin{cases} \lambda_1^b=1 \\ \lambda_{2,3}^b=\dfrac{3\pm\sqrt{9-8}}{2} \end{cases}}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\begin{cases} \lambda_1^b=1 \\ \lambda_{2,3}^b=\dfrac{3\pm1}{2} \end{cases}} \;\Leftrightarrow\; \underline{\begin{cases} \lambda_1^b=1 \\ \lambda_2^b=\dfrac{2}{2} \\ \lambda_3^b=\dfrac{4}{2} \end{cases}} \;\Leftrightarrow\; \underline{\begin{cases} \lambda_1^b=1 \\ \lambda_2^b=1 \\ \lambda_3^b=2 \end{cases}}$$

добијају се две својствене вредности (друга је дегенерисана) матрице $\mathscr{B}$

$$\lambda_{1,2}^b=1 \text{ и } \lambda_3^b=2 .$$

Сада треба одредити *својствене векторе* обе матрице. Из матричног израза за прву матрицу

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2}-\lambda & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2}-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{2}-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

којим се на једноставнији начин записује систем једначина

$$\begin{cases} \left(\frac{3}{2}-\lambda\right)\xi_1 + \frac{1}{2}\xi_2 = 0 \\ \frac{1}{2}\xi_1 + \left(\frac{3}{2}-\lambda\right)\xi_2 = 0 \\ \left(\frac{4}{2}-\lambda\right)\xi_3 = 0 \end{cases}$$

замењивањем добијених својствених вредности добијају се својствени вектори.

Прво се у горњи систем убацује својствена вредност $\lambda_1^a = 1$

$$\begin{cases} \left(\frac{3}{2}-\lambda_1^a\right)\xi_1 + \frac{1}{2}\xi_2 = 0 \\ \frac{1}{2}\xi_1 + \left(\frac{3}{2}-\lambda_1^a\right)\xi_2 = 0 \\ \left(\frac{4}{2}-\lambda_1^a\right)\xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{3}{2}-1\right)\xi_1 + \frac{1}{2}\xi_2 = 0 \\ \frac{1}{2}\xi_1 + \left(\frac{3}{2}-1\right)\xi_2 = 0 \\ \left(\frac{4}{2}-1\right)\xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{3}{2}-\frac{2}{2}\right)\xi_1 + \frac{1}{2}\xi_2 = 0 \\ \frac{1}{2}\xi_1 + \left(\frac{3}{2}-\frac{2}{2}\right)\xi_2 = 0 \\ \left(\frac{4}{2}-\frac{2}{2}\right)\xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}\xi_1 + \frac{1}{2}\xi_2 = 0 \\ \frac{1}{2}\xi_1 + \frac{1}{2}\xi_2 = 0 \\ \frac{2}{2}\xi_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 + \xi_2 = 0 \\ \xi_1 + \xi_2 = 0 \\ 2\xi_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi_1 = -\xi_2 \\ \xi_1 + \xi_2 = 0 \\ \xi_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi_1 = -\xi_2 \\ -\xi_2 + \xi_2 = 0 \\ \xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = -\xi_2 \\ 0 \cdot \xi_2 = 0 \\ \xi_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi_1 = -\xi_2 \\ \xi_2 \in \mathbb{R} \\ \xi_3 = 0 \end{cases}$$

Да би се својствени вектор разликовао од нултог вектора који представља тривијално решење својственог проблема, узима се да је $\xi_2 = -1$, те је онда $\xi_1 = 1$; онда се први својствени вектор може записати било као матрица-колона

$$\left[|v_1\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

било као уређена тројка

$$|v_1\rangle = (1,-1,0)\ .$$

Овако добијени својствени вектор одговара првој својственој вредности $\lambda_1^a = 1$.

Након замене друге (дегенерисане) својствене вредности $\lambda_{2,3}^{a}=2$ у раније поменути систем једначина следи

$$\begin{cases}\left(\frac{3}{2}-\lambda_{2,3}^{a}\right)\xi_1+\frac{1}{2}\xi_2=0\\ \frac{1}{2}\xi_1+\left(\frac{3}{2}-\lambda_{2,3}^{a}\right)\xi_2=0\\ \left(\frac{4}{2}-\lambda_{2,3}^{a}\right)\xi_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\frac{3}{2}-2\right)\xi_1+\frac{1}{2}\xi_2=0\\ \frac{1}{2}\xi_1+\left(\frac{3}{2}-2\right)\xi_2=0\\ \left(\frac{4}{2}-2\right)\xi_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{2}\right)\xi_1+\frac{1}{2}\xi_2=0\\ \frac{1}{2}\xi_1+\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{2}\right)\xi_2=0\\ \left(\frac{4}{2}-\frac{4}{2}\right)\xi_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\frac{1}{2}\xi_1+\frac{1}{2}\xi_2=0\\ \frac{1}{2}\xi_1-\frac{1}{2}\xi_2=0\\ 0\cdot\xi_3=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-\xi_1+\xi_2=0\\ \xi_1-\xi_2=0\\ \xi_3\in\mathbb{R}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\xi_1=\xi_2\\ \xi_1-\xi_2=0\\ \xi_3\in\mathbb{R}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\xi_1=\xi_2\\ \xi_2-\xi_2=0\\ \xi_3\in\mathbb{R}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\xi_1=\xi_2\\ 0\cdot\xi_2=0\\ \xi_3\in\mathbb{R}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\xi_1=\xi_2\\ \xi_2\in\mathbb{R}\\ \xi_3\in\mathbb{R}\end{cases}$$

Будући да је друга својствена вредност матрице $\mathscr{A}$ дегенерисана, из ње треба добити два различита својствена вектора. Стога се прво бира да су $\xi_2=1$ и $\xi_3=2$, те је $\xi_1=1$. Тада се други својствени вектор може представити било као матрица-колона

$$\left[|v_2\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$$

било као уређена тројка

$$|v_2\rangle=(1,1,2)\,.$$

Потом се узима да је $\xi_2=1$ и $\xi_3=-1$, те је $\xi_1=1$. Тада се трећи својствени вектор може представити било као матрица-колона

$$\left[|v_3\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$$

било као уређена тројка

$$|v_3\rangle=(1,1,-1)\,.$$

Оба овако добијена својствена вектора одговарају другој својственој вредности $\lambda_{2,3}^{a}=2$.

Сада треба Грам-Шмитовим поступком ортонормирати добијене својствене векторе

$$\left\{|v_1\rangle=(1,-1,0),|v_2\rangle=(1,1,2),|v_3\rangle=(1,1,-1)\right\}.$$

Ипак, пошто су сва три вектора међусобно ортогонална

$$\langle v_1|v_2\rangle=\langle(1,-1,0)|(1,1,2)\rangle=1^*\cdot1+(-1)^*\cdot1+0^*\cdot2=1-1=0\,,$$

$$\langle v_1|v_3\rangle=\langle(1,-1,0)|(1,1,-1)\rangle=1^*\cdot1+(-1)^*\cdot1+0^*\cdot(-1)=1-1=0\,,$$

$$\langle v_2 | v_3 \rangle = \langle (1,1,2) | (1,1,-1) \rangle = 1^* \cdot 1 + 1^* \cdot 1 + 2^* \cdot (-1) = 1 + 1 - 2 = 0$$

довољно их је *нормирати* - односно поделити сваки са својом нормом

$$|v_1\rangle^{\text{norm}} = \frac{|v_1\rangle}{\||v_1\rangle\|} = \frac{|v_1\rangle}{\sqrt{\langle v_1 | v_1 \rangle}} = \frac{(1,-1,0)}{\sqrt{\langle (1,-1,0) | (1,-1,0) \rangle}} = \frac{(1,-1,0)}{\sqrt{1^* \cdot 1 + (-1)^* \cdot (-1) + 0^* \cdot 0}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0),$$

$$|v_2\rangle^{\text{norm}} = \frac{|v_2\rangle}{\||v_2\rangle\|} = \frac{|v_2\rangle}{\sqrt{\langle v_2 | v_2 \rangle}} = \frac{(1,1,2)}{\sqrt{\langle (1,1,2) | (1,1,2) \rangle}} = \frac{(1,1,2)}{\sqrt{1^* \cdot 1 + 1^* \cdot 1 + 2^* \cdot 2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2),$$

$$|v_3\rangle^{\text{norm}} = \frac{|v_3\rangle}{\||v_3\rangle\|} = \frac{|v_3\rangle}{\sqrt{\langle v_3 | v_3 \rangle}} = \frac{(1,1,-1)}{\sqrt{\langle (1,1,-1) | (1,1,-1) \rangle}} = \frac{(1,1,-1)}{\sqrt{1^* \cdot 1 + 1^* \cdot 1 + (-1)^* \cdot (-1)}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1),$$

чиме је добијен скуп ортонормираних својствених вектора матрице $\mathscr{A}$

$$\left\{ |v_1\rangle^{\text{norm}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0), |v_2\rangle^{\text{norm}} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2), |v_3\rangle^{\text{norm}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1) \right\}$$

или, у облику матрица-колона

$$\left\{ \left[|v_1\rangle\right]_{|e_i\rangle}^{\text{norm}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \left[|v_2\rangle\right]_{|e_i\rangle}^{\text{norm}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \left[|v_3\rangle\right]_{|e_i\rangle}^{\text{norm}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Сада треба одредити *својствене векторе* друге матрице, на основу матричног израза

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{3} - \lambda & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} - \lambda & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

којим се на једноставнији начин записује систем једначина

$$\begin{cases} \left(\frac{4}{3} - \lambda\right)\xi_1 + \frac{1}{3}\xi_2 - \frac{1}{3}\xi_3 = 0 \\ \frac{1}{3}\xi_1 + \left(\frac{4}{3} - \lambda\right)\xi_2 - \frac{1}{3}\xi_3 = 0 \\ -\frac{1}{3}\xi_1 - \frac{1}{3}\xi_2 + \left(\frac{4}{3} - \lambda\right)\xi_3 = 0 \end{cases}$$

из кога се могу добити својствени вектори замењивањем добијених својствених вредности.

Прво се у горњи систем убацује својствена вредност $\lambda_{1,2}^b = 1$

$$\begin{cases} \left(\frac{4}{3}-\lambda_{1,2}^b\right)\xi_1+\frac{1}{3}\xi_2-\frac{1}{3}\xi_3=0 \\ \frac{1}{3}\xi_1+\left(\frac{4}{3}-\lambda_{1,2}^b\right)\xi_2-\frac{1}{3}\xi_3=0 \\ -\frac{1}{3}\xi_1-\frac{1}{3}\xi_2+\left(\frac{4}{3}-\lambda_{1,2}^b\right)\xi_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{4}{3}-1\right)\xi_1+\frac{1}{3}\xi_2-\frac{1}{3}\xi_3=0 \\ \frac{1}{3}\xi_1+\left(\frac{4}{3}-1\right)\xi_2-\frac{1}{3}\xi_3=0 \\ -\frac{1}{3}\xi_1-\frac{1}{3}\xi_2+\left(\frac{4}{3}-1\right)\xi_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{4}{3}-\frac{3}{3}\right)\xi_1+\frac{1}{3}\xi_2-\frac{1}{3}\xi_3=0 \\ \frac{1}{3}\xi_1+\left(\frac{4}{3}-\frac{3}{3}\right)\xi_2-\frac{1}{3}\xi_3=0 \\ -\frac{1}{3}\xi_1-\frac{1}{3}\xi_2+\left(\frac{4}{3}-\frac{3}{3}\right)\xi_3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}\xi_1+\frac{1}{3}\xi_2-\frac{1}{3}\xi_3=0 \\ \frac{1}{3}\xi_1+\frac{1}{3}\xi_2-\frac{1}{3}\xi_3=0 \\ -\frac{1}{3}\xi_1-\frac{1}{3}\xi_2+\frac{1}{3}\xi_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1+\xi_2-\xi_3=0 \\ \xi_1+\xi_2-\xi_3=0 \\ -\xi_1-\xi_2+\xi_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1+\xi_2-\xi_3=0 \\ \xi_1+\xi_2-\xi_3=0 \\ \xi_1+\xi_2-\xi_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi_3=\xi_1+\xi_2 \\ \xi_1+\xi_2-\xi_1-\xi_2=0 \\ \xi_1+\xi_2-\xi_1-\xi_2=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \xi_3=\xi_1+\xi_2 \\ \xi_1-\xi_1+\xi_2-\xi_2=0 \\ \xi_1-\xi_1+\xi_2-\xi_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_3=\xi_1+\xi_2 \\ \xi_1-\xi_1=0 \\ \xi_2-\xi_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_3=\xi_1+\xi_2 \\ 0\cdot\xi_1=0 \\ 0\cdot\xi_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi_3=\xi_1+\xi_2 \\ \xi_1\in\mathbb{R} \\ \xi_2\in\mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1\in\mathbb{R} \\ \xi_2\in\mathbb{R} \\ \xi_3=\xi_1+\xi_2 \end{cases}$$

Будући да је прва својствена вредност матрице $\mathscr{B}$ дегенерисана, из ње треба добити два различита својствена вектора. Стога се прво бира да је $\xi_1 = 1$ и $\xi_2 = 1$, те је $\xi_3 = 2$. Тада се први својствени вектор може представити било као матрица-колона

$$\left[|v_1\rangle\right]_{\{|e_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

било као уређена тројка

$$|v_1\rangle = (1,1,2) .$$

Потом се узима да је $\xi_1 = 1$ и $\xi_2 = -1$, те је $\xi_3 = 0$. Тада се други својствени вектор може представити било као матрица-колона

$$\left[|v_2\rangle\right]_{\{|e_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

било као уређена тројка

$$|v_2\rangle = (1,-1,0) .$$

Оба овако добијена својствена вектора одговарају првој својственој вредности $\lambda_{1,2}^b = 1$.

Затим се у горњи систем убацује својствена вредност $\lambda_3^b = 2$

$$\begin{cases}\left(\frac{4}{3}-\lambda_3^b\right)\xi_1+\frac{1}{3}\xi_2-\frac{1}{3}\xi_3=0\\ \frac{1}{3}\xi_1+\left(\frac{4}{3}-\lambda_3^b\right)\xi_2-\frac{1}{3}\xi_3=0\\ -\frac{1}{3}\xi_1-\frac{1}{3}\xi_2+\left(\frac{4}{3}-\lambda_3^b\right)\xi_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left(\frac{4}{3}-2\right)\xi_1+\frac{1}{3}\xi_2-\frac{1}{3}\xi_3=0\\ \frac{1}{3}\xi_1+\left(\frac{4}{3}-2\right)\xi_2-\frac{1}{3}\xi_3=0\\ -\frac{1}{3}\xi_1-\frac{1}{3}\xi_2+\left(\frac{4}{3}-2\right)\xi_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left(\frac{4}{3}-\frac{6}{3}\right)\xi_1+\frac{1}{3}\xi_2-\frac{1}{3}\xi_3=0\\ \frac{1}{3}\xi_1+\left(\frac{4}{3}-\frac{6}{3}\right)\xi_2-\frac{1}{3}\xi_3=0\\ -\frac{1}{3}\xi_1-\frac{1}{3}\xi_2+\left(\frac{4}{3}-\frac{6}{3}\right)\xi_3=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-\frac{2}{3}\xi_1+\frac{1}{3}\xi_2-\frac{1}{3}\xi_3=0\\ \frac{1}{3}\xi_1-\frac{2}{3}\xi_2-\frac{1}{3}\xi_3=0\\ -\frac{1}{3}\xi_1-\frac{1}{3}\xi_2-\frac{2}{3}\xi_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2\xi_1+\xi_2-\xi_3=0\\ \xi_1-2\xi_2-\xi_3=0\\ -\xi_1-\xi_2-2\xi_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2\xi_1-\xi_2+\xi_3=0\\ \xi_1=2\xi_2+\xi_3\\ \xi_1+\xi_2+2\xi_3=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2\xi_1-\xi_2+\xi_3=0\\ \xi_1=2\xi_2+\xi_3\\ 2\xi_2+\xi_3+\xi_2+2\xi_3=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2\xi_1-\xi_2+\xi_3=0\\ \xi_1=2\xi_2+\xi_3\\ 3\xi_2+3\xi_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2\xi_1-\xi_2+\xi_3=0\\ \xi_1=2\xi_2+\xi_3\\ \xi_2+\xi_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2\xi_1-\xi_2+\xi_3=0\\ \xi_1=2\xi_2+\xi_3\\ \xi_2=-\xi_3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2\xi_1-\xi_2+\xi_3=0\\ \xi_1=-2\xi_3+\xi_3\\ \xi_2=-\xi_3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2\xi_1-\xi_2+\xi_3=0\\ \xi_1=-\xi_3\\ \xi_2=-\xi_3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-2\xi_3+\xi_3+\xi_3=0\\ \xi_1=-\xi_3\\ \xi_2=-\xi_3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0\cdot\xi_3=0\\ \xi_1=-\xi_3\\ \xi_2=-\xi_3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\xi_3\in\mathbb{R}\\ \xi_1=-\xi_3\\ \xi_2=-\xi_3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\xi_1=-\xi_3\\ \xi_2=-\xi_3\\ \xi_3\in\mathbb{R}\end{cases}$$

Да би се својствени вектор разликовао од нултог вектора који представља тривијално решење својственог проблема, узима се да је $\xi_3=-1$, те су онда $\xi_1=1$ и $\xi_2=1$; први својствени вектор може се записати као матрица-колона

$$\left[|v_3\rangle\right]_{\{|v_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$$

или као уређена тројка

$$|v_3\rangle=(1,1,-1)\,.$$

Овако добијени својствени вектор одговара трећој својственој вредности $\lambda_3^b = 2$.

На овај начин добијен је скуп својствених вектора матрице $\mathscr{B}$

$$\{|v_1\rangle=(1,1,2),|v_2\rangle=(1,-1,0),|v_3\rangle=(1,1,-1)\}$$

који је у суштини исти као и скуп својствених вектора матрице $\mathscr{A}$

$$\{|v_1\rangle=(1,-1,0),|v_2\rangle=(1,1,2),|v_3\rangle=(1,1,-1)\}\,,$$

те је онда *заједнички* својствени базис за обе матрице управо базис

$$\left\{|v_1\rangle^{\text{norm}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0),|v_2\rangle^{\text{norm}}=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2),|v_3\rangle^{\text{norm}}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)\right\}.$$

(10.14) Показати да се за *ортогонални* оператор у еуклидском простору може одредити ортонормирани базис у коме ће он бити представљен квази-дијагоналном матрицом која на дијагонали има бројеве 1 или -1 или подматрице облика

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

или неку њихову комбинацију.

Нека је $\hat{A}$ *ортогонални* оператор у еуклидском простору.

Оператор $\hat{B}=\hat{A}+\hat{A}^{-1}$ је *симетричан* оператор, који комутира са оператором $\hat{A}$

$$\hat{A}\hat{B}=\hat{A}(\hat{A}+\hat{A}^{-1})=\hat{A}\hat{A}+\hat{A}\hat{A}^{-1}=\hat{A}\hat{A}+\hat{I}=\hat{I}+\hat{A}\hat{A}=\hat{A}\hat{A}^{-1}+\hat{A}\hat{A}=\hat{A}(\hat{A}^{-1}+\hat{A})=\hat{B}\hat{A}.$$

Оператор $\hat{B}$ има ортонормиран својствени базис у простору $\mathbb{V}$, док се цео простор $\mathbb{V}$ може разложити на *ортогоналну суму* својствених потпростора оператора $\hat{B}$, а који су инваријантни потпростори оператора $\hat{A}$: $\mathbb{V}=\sum_i^{\oplus}\mathbb{V}_i$.

Стога за својствени вектор $|v\rangle$ из потпростора $\mathbb{V}_i$ важе следећи изрази

$$\underline{\begin{cases} \hat{B}|v\rangle=\lambda_i|v\rangle \\ (\hat{A}+\hat{A}^{-1})|v\rangle=\lambda_i|v\rangle \end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} \hat{B}|v\rangle=\lambda_i\hat{I}|v\rangle \\ (\hat{A}+\hat{A}^{-1})|v\rangle=\lambda_i\hat{I}|v\rangle \end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} (\hat{B}-\lambda_i\hat{I})|v\rangle=|0\rangle \\ (\hat{A}+\hat{A}^{-1}-\lambda_i\hat{I})|v\rangle=|0\rangle \end{cases}}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\begin{cases} (\hat{B}-\lambda_i\hat{I})|v\rangle=|0\rangle \\ (\hat{A}^{-1}\hat{A}^2+\hat{A}^{-1}\hat{I}-\lambda_i\hat{A}^{-1}\hat{A})|v\rangle=|0\rangle \end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} (\hat{B}-\lambda_i\hat{I})|v\rangle=|0\rangle \\ \hat{A}^{-1}(\hat{A}^2+\hat{I}-\lambda_i\hat{A})|v\rangle=|0\rangle \end{cases}} \Rightarrow \underline{\begin{cases} (\hat{B}-\lambda_i\hat{I})|v\rangle=|0\rangle \\ (\hat{A}^2+\hat{I}-\lambda_i\hat{A})|v\rangle=|0\rangle \end{cases}}$$

Одавде се за $\lambda_i=\pm 2$ добија

$$\underline{\begin{cases} (\hat{B}\pm 2\hat{I})|v\rangle=|0\rangle \\ (\hat{A}^2+\hat{I}\mp 2\hat{A})|v\rangle=|0\rangle \end{cases}} \Leftrightarrow (\hat{A}^2\mp 2\hat{A}+\hat{I}^2)|v\rangle=|0\rangle \Leftrightarrow (\hat{A}\mp\hat{I})^2|v\rangle=|0\rangle \Leftrightarrow (\hat{A}\mp\hat{I})|v\rangle=|0\rangle$$

$$\Leftrightarrow \hat{A}|v\rangle\mp\hat{I}|v\rangle=|0\rangle \Leftrightarrow \hat{A}|v\rangle=\pm\hat{I}|v\rangle \Leftrightarrow \hat{A}|v\rangle=\pm|v\rangle \Leftrightarrow \hat{A}|v\rangle=(\pm 1)|v\rangle$$

одакле је јасно да оператор $\hat{A}$ у потпростору $\mathbb{V}_i$ има својствене вредности $\lambda_{1,2}=\pm 1$.

За $\lambda_i=\pm 2$ оператор $\hat{A}$ нема својствене векторе у потпросторима $\mathbb{V}_i$ јер су једине могуће својствене вредности ортогоналног оператора $+1$ и -1, а не може бити $\hat{A}|v\rangle=\pm|v\rangle$.

Зато су вектори $|v\rangle$ и $\hat{A}|v\rangle$ (за $|v\rangle\neq|0\rangle$) *линеарно независни* ($\hat{A}$ је несингуларан оператор), а из

$$\hat{A}\left(\hat{A}|v\rangle\right)=\hat{A}^2|v\rangle=(\lambda_i\hat{A}-\hat{I})|v\rangle=\lambda_i\hat{A}|v\rangle-\hat{I}|v\rangle$$

следи да је $\mathbb{L}\left(\hat{A}|v\rangle,|v\rangle\right)$ *инваријантан* на деловање оператора $\hat{A}$. Будући да је $\hat{A}$ нормалан оператор, онда је и $\mathbb{L}^{\perp}\left(\hat{A}|v\rangle,|v\rangle\right)$ *инваријантан* на деловање оператора $\hat{A}$.

Зато се читав простор $\mathbb{V}$ може представити као ортогонална сума *једнодимензионалних* инваријантних потпростора (у којима је својствена вредност оператора $\hat{A}$ или $+1$ или -1) и дводимензионалних инваријантних потпростора, у којима је најпростији облик ортогоналног оператора онај са ортонормираношћу врста и колона

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Погодним адаптираним базисом се, преко трансформације сличности

$$\mathscr{A}_{dij} = \mathscr{U}^{\dagger}\mathscr{A}\mathscr{U} ,$$

ортогонални оператор $\hat{A}$ може превести у жељени *квазидијагонални облик*, најопштије дат као

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \text{ или } -1 \end{bmatrix}.$$

(10.15) Показати да ортогонална матрица

$$\mathscr{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$$

представља *праву ротацију* у простору $\mathbb{R}^3$, а онда одредити *орт* и *угао* поменуте ротације.

(а) Поменути орт представљаће својствени вектор дате матрице

$$\mathscr{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$$

који се добија решавањем њеног својственог проблема

$$\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\xi_3\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\xi_3\end{bmatrix}$$

то јест

$$\begin{bmatrix}-\lambda&1&0\\0&-\lambda&1\\1&0&-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\xi_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Да решење својственог проблема не би било тривијално, матрица ξ мора имати барем једну компоненту различиту од нуле, а то значи да детерминанта горње матрице мора бити једнака нули

$$\begin{vmatrix}-\lambda&1&0\\0&-\lambda&1\\1&0&-\lambda\end{vmatrix}=0\,.$$

Решавањем горњег израза

$$(-\lambda)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-\lambda&1\\0&-\lambda\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0&1\\1&-\lambda\end{vmatrix}+0\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}0&-\lambda\\1&0\end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow\ (-\lambda)\begin{vmatrix}-\lambda&1\\0&-\lambda\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0&1\\1&-\lambda\end{vmatrix}=0\ \Leftrightarrow\ (-\lambda)\lambda^2+1=0\ \Leftrightarrow\ \lambda^3-1=0$$

$$\Leftrightarrow\ \lambda^3=1\ \Leftrightarrow\ \lambda\cdot\lambda\cdot\lambda=1\cdot1\cdot1\ \Rightarrow\ \lambda_1=1$$

добија се једна једина (трипут дегенерисана) својствена вредност матрице $\mathscr{A}$

$$\lambda_1=1.$$

Сада треба ову својствену вредност заменити у систем једначина који одговара матричном изразу

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

а тај би био

$$\begin{cases} -\lambda\xi_1 + \xi_2 = 0 \\ -\lambda\xi_2 + \xi_3 = 0 \\ \xi_1 - \lambda\xi_3 = 0 \end{cases}$$

чиме се добија

$$\begin{cases} -\lambda_1\xi_1 + \xi_2 = 0 \\ -\lambda_1\xi_2 + \xi_3 = 0 \\ \xi_1 - \lambda_1\xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1\cdot\xi_1 + \xi_2 = 0 \\ -\xi_2 + \xi_3 = 0 \\ \xi_1 - 1\cdot\xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\xi_1 + \xi_2 = 0 \\ -\xi_2 + \xi_3 = 0 \\ \xi_1 - \xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = \xi_2 \\ -\xi_2 + \xi_3 = 0 \\ \xi_1 = \xi_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi_1 = \xi_2 \\ -\xi_1 + \xi_1 = 0 \\ \xi_1 = \xi_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = \xi_2 \\ 0\cdot\xi_1 = 0 \\ \xi_1 = \xi_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi_2 = \xi_1 \\ \xi_1 \in \mathbb{R} \\ \xi_3 = \xi_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 \in \mathbb{R} \\ \xi_2 = \xi_1 \\ \xi_3 = \xi_1 \end{cases}$$

Да би се својствени вектор разликовао од нултог вектора који представља тривијално решење својственог проблема, узима се да је $\xi_1 = 1$, те су онда $\xi_2 = 1$ и $\xi_3 = 1$; онда се својствени вектор може записати као матрица-колона

$$\left[|v_1\rangle\right]_{\{|e_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

или као уређена тројка

$$|v_1\rangle = (1,1,1)\,.$$

Да би се добио тражени орт, потребно је још поделити добијени својствени вектор својом нормом

$$|v_1\rangle^{\text{norm}} = \frac{|v_1\rangle}{\left\| |v_1\rangle \right\|} = \frac{|v_1\rangle}{\sqrt{\langle v_1|v_1\rangle}} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{\langle (1,1,1)|(1,1,1)\rangle}} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{1^*\cdot 1 + 1^*\cdot 1 + 1^*\cdot 1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

чиме је добијен *орт ротације*, који уствари представља ортонормирани својствени базис једнодимензионалног својственог потпростора у коме је својствена вредност матрице $\mathscr{A}$ једнака $\lambda_1 = 1$.

Сад, будући да је еуклидски простор *тродимензионалан*, потребна су још *два* ортонормирана вектора, који ће чинити базис дводимензионалног инваријантног потпростора који би допуњавао добијени једнодимензионални. Као кандидате је најлакше узети други и трећи вектор апсолутног базиса

$$\left|\mathrm{e}_2\right\rangle = \left|v_2\right\rangle = (0,1,0)\,,\ \left|\mathrm{e}_3\right\rangle = \left|v_3\right\rangle = (0,0,1)$$

те их ортонормирати у односу на добијени нормирани својствени вектор, прво други

$$\left|v_2\right\rangle^{\mathrm{norm}} = \frac{\left|v_2\right\rangle - {}^{\mathrm{norm}}\left\langle v_1\middle|v_2\right\rangle\left|v_1\right\rangle^{\mathrm{norm}}}{\left\|\left|v_2\right\rangle - {}^{\mathrm{norm}}\left\langle v_1\middle|v_2\right\rangle\left|v_1\right\rangle^{\mathrm{norm}}\right\|} = \frac{(0,1,0) - \frac{1}{\sqrt{3}}\left\langle(1,1,1)\middle|(0,1,0)\right\rangle\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)}{\left\|(0,1,0) - \frac{1}{\sqrt{3}}\left\langle(1,1,1)\middle|(0,1,0)\right\rangle\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\right\|}$$

$$= \frac{(0,1,0) - \frac{1}{3}\left\langle(1,1,1)\middle|(0,1,0)\right\rangle(1,1,1)}{\left\|(0,1,0) - \frac{1}{3}\left\langle(1,1,1)\middle|(0,1,0)\right\rangle(1,1,1)\right\|} = \frac{(0,1,0) - \frac{1}{3}\left(1\cdot 0 + 1\cdot 1 + 1\cdot 0\right)(1,1,1)}{\left\|(0,1,0) - \frac{1}{3}\left(1\cdot 0 + 1\cdot 1 + 1\cdot 0\right)(1,1,1)\right\|}$$

$$= \frac{(0,1,0) - \frac{1}{3}(1,1,1)}{\left\|(0,1,0) - \frac{1}{3}(1,1,1)\right\|} = \frac{(0,1,0) + \left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)}{\left\|(0,1,0) + \left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)\right\|} = \frac{\left(-\frac{1}{3},1-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)}{\left\|\left(-\frac{1}{3},1-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)\right\|} = \frac{\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)}{\left\|\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)\right\|}$$

$$= \frac{\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{\left\langle\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)\middle|\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)\right\rangle}} = \frac{\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^*\left(-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^*\frac{2}{3} + \left(-\frac{1}{3}\right)^*\left(-\frac{1}{3}\right)}}$$

$$= \frac{\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{1}{9}}} = \frac{\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{\frac{6}{9}}} = \sqrt{\frac{9}{6}}\,\frac{1}{3}(-1,2,-1) = \frac{3}{\sqrt{6}}\,\frac{1}{3}(-1,2,-1) = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,-1)$$

а потом и трећи

$$\left|v_3\right\rangle^{\mathrm{norm}} = \frac{\left|v_3\right\rangle - {}^{\mathrm{norm}}\left\langle v_1\middle|v_3\right\rangle\left|v_1\right\rangle^{\mathrm{norm}} - {}^{\mathrm{norm}}\left\langle v_2\middle|v_3\right\rangle\left|v_2\right\rangle^{\mathrm{norm}}}{\left\|\left|v_3\right\rangle - {}^{\mathrm{norm}}\left\langle v_1\middle|v_3\right\rangle\left|v_1\right\rangle^{\mathrm{norm}} - {}^{\mathrm{norm}}\left\langle v_2\middle|v_3\right\rangle\left|v_2\right\rangle^{\mathrm{norm}}\right\|}$$

$$= \frac{(0,0,1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\left\langle(1,1,1)\middle|(0,0,1)\right\rangle\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) - \frac{1}{\sqrt{6}}\left\langle(-1,2,-1)\middle|(0,0,1)\right\rangle\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,-1)}{\left\|(0,0,1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\left\langle(1,1,1)\middle|(0,0,1)\right\rangle\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) - \frac{1}{\sqrt{6}}\left\langle(-1,2,-1)\middle|(0,0,1)\right\rangle\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,-1)\right\|}$$

$$= \frac{(0,0,1) - \frac{1}{3}\left\langle(1,1,1)\middle|(0,0,1)\right\rangle(1,1,1) - \frac{1}{6}\left\langle(-1,2,-1)\middle|(0,0,1)\right\rangle(-1,2,-1)}{\left\|(0,0,1) - \frac{1}{3}\left\langle(1,1,1)\middle|(0,0,1)\right\rangle(1,1,1) - \frac{1}{6}\left\langle(-1,2,-1)\middle|(0,0,1)\right\rangle(-1,2,-1)\right\|}$$

односно

$$\left|v_3\right\rangle^{\text{norm}} == \frac{(0,0,1)-\frac{1}{3}\big(1\cdot 0+1\cdot 0+1\cdot 1\big)(1,1,1)-\frac{1}{6}\big[(-1)\cdot 0+2\cdot 0+(-1)\cdot 1\big](-1,2,-1)}{\left\|(0,0,1)-\frac{1}{3}\big(1\cdot 0+1\cdot 0+1\cdot 1\big)(1,1,1)-\frac{1}{6}\big[(-1)\cdot 0+2\cdot 0+(-1)\cdot 1\big](-1,2,-1)\right\|}$$

$$=\frac{(0,0,1)-\frac{1}{3}(1,1,1)+\frac{1}{6}(-1,2,-1)}{\left\|(0,0,1)-\frac{1}{3}(1,1,1)+\frac{1}{6}(-1,2,-1)\right\|}=\frac{(0,0,1)+\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{6},\frac{2}{6},-\frac{1}{6}\right)}{\left\|(0,0,1)+\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{6},\frac{2}{6},-\frac{1}{6}\right)\right\|}$$

$$=\frac{\left(0-\frac{1}{3}-\frac{1}{6},0-\frac{1}{3}+\frac{2}{6},1-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)}{\left\|\left(0-\frac{1}{3}-\frac{1}{6},0-\frac{1}{3}+\frac{2}{6},1-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)\right\|}=\frac{\left(-\frac{2}{6}-\frac{1}{6},-\frac{2}{6}+\frac{2}{6},\frac{6}{6}-\frac{2}{6}-\frac{1}{6}\right)}{\left\|\left(-\frac{2}{6}-\frac{1}{6},-\frac{2}{6}+\frac{2}{6},\frac{6}{6}-\frac{2}{6}-\frac{1}{6}\right)\right\|}=\frac{\left(-\frac{3}{6},0,\frac{3}{6}\right)}{\left\|\left(-\frac{3}{6},0,\frac{3}{6}\right)\right\|}$$

$$=\frac{\left(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)}{\left\|\left(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)\right\|}=\frac{\left(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left\langle\left(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)\middle|\left(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)\right\rangle}}=\frac{\left(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^{*}\left(-\frac{1}{2}\right)+0^{*}\cdot 0+\left(\frac{1}{2}\right)^{*}\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{\left(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}}=\frac{\left(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{2}{4}}}=\sqrt{\frac{4}{2}}\frac{1}{2}(-1,0,1)=\frac{2}{\sqrt{2}}\frac{1}{2}(-1,0,1)=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)$$

Овако добијени базис може се записати и у облику *матрица-колона*

$$\left|v_1\right\rangle^{\text{norm}}\to\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{2}\\\sqrt{2}\end{bmatrix},\ \left|v_2\right\rangle^{\text{norm}}\to\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\end{bmatrix}\text{ и }\left|v_3\right\rangle^{\text{norm}}\to\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-\sqrt{3}\\0\\\sqrt{3}\end{bmatrix}$$

од којих се онда направи унитарни оператор

$$\mathscr{U}=\Big[\left|v_2\right\rangle^{\text{norm}}\Big|\left|v_3\right\rangle^{\text{norm}}\Big|\left|v_1\right\rangle^{\text{norm}}\Big]=\frac{1}{\sqrt{6}}\left[\begin{array}{c|c|c}-1&-\sqrt{3}&\sqrt{2}\\2&0&\sqrt{2}\\-1&\sqrt{3}&\sqrt{2}\end{array}\right]=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-1&-\sqrt{3}&\sqrt{2}\\2&0&\sqrt{2}\\-1&\sqrt{3}&\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

од кога се преко трансформације сличности

$$\mathscr{A}_{\text{dij}}=\mathscr{U}^{\dagger}\mathscr{A}\,\mathscr{U}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-1&-\sqrt{3}&\sqrt{2}\\2&0&\sqrt{2}\\-1&\sqrt{3}&\sqrt{2}\end{bmatrix}^{\dagger}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-1&-\sqrt{3}&\sqrt{2}\\2&0&\sqrt{2}\\-1&\sqrt{3}&\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

то јест

$$\mathscr{A}_{\text{dij}} == \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 2 & 0 & \sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0\cdot(-1)+1\cdot 2+0\cdot(-1) & 0\cdot(-\sqrt{3})+1\cdot 0+0\cdot\sqrt{3} & 0\cdot\sqrt{2}+1\cdot\sqrt{2}+0\cdot\sqrt{2} \\ 0\cdot(-1)+0\cdot 2+1\cdot(-1) & 0\cdot(-\sqrt{3})+0\cdot 0+1\cdot\sqrt{3} & 0\cdot\sqrt{2}+0\cdot\sqrt{2}+1\cdot\sqrt{2} \\ 1\cdot(-1)+0\cdot 2+0\cdot(-1) & 1\cdot(-\sqrt{3})+0\cdot 0+0\cdot\sqrt{3} & 1\cdot\sqrt{2}+0\cdot\sqrt{2}+0\cdot\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & \sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ -1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} (-1)\cdot 2+2\cdot(-1)+(-1)\cdot(-1) & (-1)\cdot 0+2\cdot\sqrt{3}+(-1)\cdot(-\sqrt{3}) & (-1)\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{2}+(-1)\cdot\sqrt{2} \\ (-\sqrt{3})\cdot 2+0\cdot(-1)+\sqrt{3}\cdot(-1) & (-\sqrt{3})\cdot 0+0\cdot\sqrt{3}+\sqrt{3}\cdot(-\sqrt{3}) & (-\sqrt{3})\cdot\sqrt{2}+0\cdot\sqrt{2}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{2} \\ \sqrt{2}\cdot 2+\sqrt{2}\cdot(-1)+\sqrt{2}\cdot(-1) & \sqrt{2}\cdot 0+\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+\sqrt{2}\cdot(-\sqrt{3}) & \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -3 & 3\sqrt{3} & 0 \\ -3\sqrt{3} & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{6} & \frac{3\sqrt{3}}{6} & 0 \\ -\frac{3\sqrt{3}}{6} & -\frac{3}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6}{6} \end{bmatrix}$$

добија *квазидијагонални* облик матрице

$$\mathscr{A}_{\text{dij}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Упоређивањем са општим обликом квазидијагоналне форме из претходног задатка (10.21)

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \text{ или } -1 \end{bmatrix}$$

добија се *угао ротације* као

$$\cos\alpha = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \alpha = \frac{3\pi}{6}+\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \alpha = \frac{4\pi}{6} \Leftrightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3}.$$

(10.16) За ниже наведене ортогоналне матрице показати да представљају *неправу ротацију* у простору $\mathbb{R}^3$, а онда одредити *орт* инвертоване осе

$$\text{(а)}\ \mathscr{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \text{(б)}\ \mathscr{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(а) Поменути орт представљаће својствени вектор дате матрице

$$\mathscr{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

који се добија решавањем њеног својственог проблема

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}$$

то јест

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Да решење својственог проблема не би било тривијално, матрица ξ мора имати барем једну компоненту различиту од нуле, а то значи да детерминанта горње матрице мора бити једнака нули

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0\,.$$

Решавањем горњег израза

$$(-\lambda)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} + (-1)\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow\ (-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ \Leftrightarrow\ (-\lambda)\lambda^2 - 1 = 0 \ \Leftrightarrow\ -\lambda^3 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow\ \lambda^3 = -1 \ \Leftrightarrow\ \lambda^3 = (-1)^3 \ \Rightarrow\ \lambda_1 = -1$$

добија се једна једина (трипут дегенерисана) својствена вредност матрице $\mathscr{A}$

$$\lambda_1 = -1.$$

Сада треба ову својствену вредност заменити у систем једначина који одговара матричном изразу

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

а тај би био

$$\begin{cases} -\lambda\xi_1-\xi_3=0 \\ \xi_1-\lambda\xi_2=0 \\ \xi_2-\lambda\xi_3=0 \end{cases}$$

чиме се добија

$$\begin{cases} -\lambda_1\xi_1-\xi_3=0 \\ \xi_1-\lambda_1\xi_2=0 \\ \xi_2-\lambda_1\xi_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1\cdot\xi_1-\xi_3=0 \\ \xi_1+1\cdot\xi_2=0 \\ \xi_2+1\cdot\xi_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1-\xi_3=0 \\ \xi_1+\xi_2=0 \\ \xi_2+\xi_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1=\xi_3 \\ \xi_1+\xi_2=0 \\ \xi_2=-\xi_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi_1=\xi_3 \\ \xi_3-\xi_3=0 \\ \xi_2=-\xi_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1=\xi_3 \\ 0\cdot\xi_3=0 \\ \xi_2=-\xi_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi_1=\xi_3 \\ \xi_3\in\mathbb{R} \\ \xi_2=-\xi_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1=\xi_3 \\ \xi_2=-\xi_3 \\ \xi_3\in\mathbb{R} \end{cases}$$

Да би се својствени вектор разликовао од нултог вектора који представља тривијално решење својственог проблема, узима се да је $\xi_3=1$, те су онда $\xi_1=1$ и $\xi_2=-1$; онда се својствени вектор може записати као матрица-колона

$$\big[|v_1\rangle\big]_{\{|e_i\rangle\}}=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

или као уређена тројка

$$|v_1\rangle=(1,-1,1).$$

Да би се добио тражени орт, потребно је још поделити добијени својствени вектор својом нормом

$$|v_1\rangle^{\text{norm}}=\frac{|v_1\rangle}{\big\||v_1\rangle\big\|}=\frac{|v_1\rangle}{\sqrt{\langle v_1|v_1\rangle}}=\frac{(1,-1,1)}{\sqrt{\langle(1,-1,1)|(1,-1,1)\rangle}}=\frac{(1,-1,1)}{\sqrt{1^*\cdot 1+(-1)^*\cdot(-1)+1^*\cdot 1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$$

чиме је добијен *орт инвертоване осе*.

Сад, будући да је еуклидски простор *тродимензионалан*, потребна су још *два* ортонормирана вектора, који ће чинити базис дводимензионалног инваријантног потпростора који би допуњавао добијени једнодимензионални. Као кандидате је најлакше узети други и трећи вектор апсолутног базиса

$$\left|e_2\right\rangle = \left|v_2\right\rangle = (0,1,0)\,,\ \left|e_3\right\rangle = \left|v_3\right\rangle = (0,0,1)$$

те их ортонормирати у односу на добијени нормирани својствени вектор, прво други

$$\left|v_2\right\rangle^{\text{norm}} = \frac{\left|v_2\right\rangle - {}^{\text{norm}}\!\left\langle v_1\middle|v_2\right\rangle\left|v_1\right\rangle^{\text{norm}}}{\left\|\left|v_2\right\rangle - {}^{\text{norm}}\!\left\langle v_1\middle|v_2\right\rangle\left|v_1\right\rangle^{\text{norm}}\right\|} = \frac{(0,1,0) - \frac{1}{\sqrt{3}}\left\langle(1,-1,1)\middle|(0,1,0)\right\rangle\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)}{\left\|(0,1,0) - \frac{1}{\sqrt{3}}\left\langle(1,-1,1)\middle|(0,1,0)\right\rangle\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)\right\|}$$

$$= \frac{(0,1,0) - \frac{1}{3}\left\langle(1,-1,1)\middle|(0,1,0)\right\rangle(1,-1,1)}{\left\|(0,1,0) - \frac{1}{3}\left\langle(1,-1,1)\middle|(0,1,0)\right\rangle(1,-1,1)\right\|} = \frac{(0,1,0) - \frac{1}{3}\left[1\cdot 0 + (-1)\cdot 1 + 1\cdot 0\right](1,-1,1)}{\left\|(0,1,0) - \frac{1}{3}\left[1\cdot 0 + (-1)\cdot 1 + 1\cdot 0\right](1,-1,1)\right\|}$$

$$= \frac{(0,1,0) + \frac{1}{3}(1,-1,1)}{\left\|(0,1,0) + \frac{1}{3}(1,-1,1)\right\|} = \frac{(0,1,0) + \left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)}{\left\|(0,1,0) + \left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\right\|} = \frac{\left(\frac{1}{3},1-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)}{\left\|\left(\frac{1}{3},1-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\right\|} = \frac{\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)}{\left\|\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)\right\|}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{\left\langle\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)\middle|\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)\right\rangle}} = \frac{\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^*\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^*\frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^*\frac{1}{3}}} = \frac{\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{1}{9}}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{\frac{6}{9}}} = \sqrt{\frac{9}{6}}\,\frac{1}{3}(1,2,1) = \frac{3}{\sqrt{6}}\,\frac{1}{3}(1,2,1) = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)$$

а потом и трећи

$$\left|v_3\right\rangle^{\text{norm}} = \frac{\left|v_3\right\rangle - {}^{\text{norm}}\!\left\langle v_1\middle|v_3\right\rangle\left|v_1\right\rangle^{\text{norm}} - {}^{\text{norm}}\!\left\langle v_2\middle|v_3\right\rangle\left|v_2\right\rangle^{\text{norm}}}{\left\|\left|v_3\right\rangle - {}^{\text{norm}}\!\left\langle v_1\middle|v_3\right\rangle\left|v_1\right\rangle^{\text{norm}} - {}^{\text{norm}}\!\left\langle v_2\middle|v_3\right\rangle\left|v_2\right\rangle^{\text{norm}}\right\|}$$

$$= \frac{(0,0,1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\left\langle(1,-1,1)\middle|(0,0,1)\right\rangle\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1) - \frac{1}{\sqrt{6}}\left\langle(1,2,1)\middle|(0,0,1)\right\rangle\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)}{\left\|(0,0,1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\left\langle(1,-1,1)\middle|(0,0,1)\right\rangle\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1) - \frac{1}{\sqrt{6}}\left\langle(1,2,1)\middle|(0,0,1)\right\rangle\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)\right\|}$$

$$= \frac{(0,0,1) - \frac{1}{3}\left\langle(1,-1,1)\middle|(0,0,1)\right\rangle(1,-1,1) - \frac{1}{6}\left\langle(1,2,1)\middle|(0,0,1)\right\rangle(1,2,1)}{\left\|(0,0,1) - \frac{1}{3}\left\langle(1,-1,1)\middle|(0,0,1)\right\rangle(1,-1,1) - \frac{1}{6}\left\langle(1,2,1)\middle|(0,0,1)\right\rangle(1,2,1)\right\|}$$

$$= \frac{(0,0,1) - \frac{1}{3}\left[1\cdot 0 + (-1)\cdot 0 + 1\cdot 1\right](1,-1,1) - \frac{1}{6}\left(1\cdot 0 + 2\cdot 0 + 1\cdot 1\right)(1,2,1)}{\left\|(0,0,1) - \frac{1}{3}\left[1\cdot 0 + (-1)\cdot 0 + 1\cdot 1\right](1,-1,1) - \frac{1}{6}\left(1\cdot 0 + 2\cdot 0 + 1\cdot 1\right)(1,2,1)\right\|}$$

односно

$$\left|v_3\right\rangle^{\text{norm}} = \frac{(0,0,1) - \frac{1}{3}(1,-1,1) - \frac{1}{6}(1,2,1)}{\left\|(0,0,1) - \frac{1}{3}(1,-1,1) - \frac{1}{6}(1,2,1)\right\|} = \frac{(0,0,1) + \left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{6},-\frac{2}{6},-\frac{1}{6}\right)}{\left\|(0,0,1) + \left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{6},-\frac{2}{6},-\frac{1}{6}\right)\right\|}$$

$$= \frac{\left(0-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}, 0+\frac{1}{3}-\frac{2}{6}, 1-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)}{\left\|\left(0-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}, 0+\frac{1}{3}-\frac{2}{6}, 1-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)\right\|} = \frac{\left(-\frac{2}{6}-\frac{1}{6}, \frac{2}{6}-\frac{2}{6}, \frac{6}{6}-\frac{2}{6}-\frac{1}{6}\right)}{\left\|\left(-\frac{2}{6}-\frac{1}{6}, \frac{2}{6}-\frac{2}{6}, \frac{6}{6}-\frac{2}{6}-\frac{1}{6}\right)\right\|} = \frac{\left(-\frac{3}{6}, 0, \frac{3}{6}\right)}{\left\|\left(-\frac{3}{6}, 0, \frac{3}{6}\right)\right\|}$$

$$= \frac{\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)}{\left\|\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)\right\|} = \frac{\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left\langle\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)\middle|\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)\right\rangle}} = \frac{\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^*\left(-\frac{1}{2}\right) + 0^*\cdot 0 + \left(\frac{1}{2}\right)^*\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}} = \frac{\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{2}{4}}} = \sqrt{\frac{4}{2}}\,\frac{1}{2}(-1,0,1) = \frac{2}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{2}(-1,0,1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)$$

Овако добијени базис може се записати и у облику *матрица-колона*

$$\left|v_1\right\rangle^{\text{norm}} \to \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\-\sqrt{2}\\\sqrt{2}\end{bmatrix},\ \left|v_2\right\rangle^{\text{norm}} \to \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} \text{ и } \left|v_3\right\rangle^{\text{norm}} \to \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-\sqrt{3}\\0\\\sqrt{3}\end{bmatrix}$$

од којих се онда направи унитарни оператор

$$\mathscr{U} = \left[\left|v_2\right\rangle^{\text{norm}} \middle| \left|v_3\right\rangle^{\text{norm}} \middle| \left|v_1\right\rangle^{\text{norm}}\right] = \frac{1}{\sqrt{6}}\left[\begin{array}{c|c|c}1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2}\\ 2 & 0 & -\sqrt{2}\\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2}\end{array}\right] = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2}\\ 2 & 0 & -\sqrt{2}\\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2}\end{bmatrix}$$

од кога се преко трансформације сличности

$$\mathscr{A}_{\text{dij}} = \mathscr{U}^\dagger \mathscr{A}\,\mathscr{U} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2}\\ 2 & 0 & -\sqrt{2}\\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2}\end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2}\\ 2 & 0 & -\sqrt{2}\\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2}\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3}\\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2}\\ 2 & 0 & -\sqrt{2}\\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2}\end{bmatrix}$$

то јест

$$\mathscr{A}_{\text{dij}} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0\cdot 1+0\cdot 2+(-1)\cdot 1 & 0\cdot(-\sqrt{3})+0\cdot 0+(-1)\cdot\sqrt{3} & 0\cdot\sqrt{2}+0\cdot(-\sqrt{2})+(-1)\cdot\sqrt{2} \\ 1\cdot 1+0\cdot 2+0\cdot 1 & 1\cdot(-\sqrt{3})+0\cdot 0+0\cdot\sqrt{3} & 1\cdot\sqrt{2}+0\cdot(-\sqrt{2})+0\cdot\sqrt{2} \\ 0\cdot 1+1\cdot 2+0\cdot 1 & 0\cdot(-\sqrt{3})+1\cdot 0+0\cdot\sqrt{3} & 0\cdot\sqrt{2}+1\cdot(-\sqrt{2})+0\cdot\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -\sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 2 & 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1\cdot(-1)+2\cdot 1+1\cdot 2 & 1\cdot(-\sqrt{3})+2\cdot(-\sqrt{3})+1\cdot 0 & 1\cdot(-\sqrt{2})+2\cdot\sqrt{2}+1\cdot(-\sqrt{2}) \\ (-\sqrt{3})\cdot(-1)+0\cdot 1+\sqrt{3}\cdot 2 & (-\sqrt{3})\cdot(-\sqrt{3})+0\cdot(-\sqrt{3})+\sqrt{3}\cdot 0 & (-\sqrt{3})\cdot(-\sqrt{2})+0\cdot\sqrt{2}+\sqrt{3}\cdot(-\sqrt{2}) \\ \sqrt{2}\cdot(-1)+(-\sqrt{2})\cdot 1+\sqrt{2}\cdot 2 & \sqrt{2}\cdot(-\sqrt{3})+(-\sqrt{2})\cdot(-\sqrt{3})+\sqrt{2}\cdot 0 & \sqrt{2}\cdot(-\sqrt{2})+(-\sqrt{2})\cdot\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot(-\sqrt{2}) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1+2+2 & -\sqrt{3}-2\sqrt{3} & -\sqrt{2}+2\sqrt{2}-\sqrt{2} \\ \sqrt{3}+2\sqrt{3} & 3 & \sqrt{6}-\sqrt{6} \\ -\sqrt{2}-\sqrt{2}+2\sqrt{2} & -\sqrt{6}+\sqrt{6} & -2-2-2 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3 & -3\sqrt{3} & 0 \\ 3\sqrt{3} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{6} & -\frac{3\sqrt{3}}{6} & 0 \\ \frac{3\sqrt{3}}{6} & \frac{3}{6} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

добија *квазидијагонални* облик матрице

$$\mathscr{A}_{\text{dij}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(б) Тражени орт јесте својствени вектор дате матрице

$$\mathscr{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

који се добија решавањем њеног својственог проблема

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}$$

то јест

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Да решење својственог проблема не би било тривијално, матрица ξ мора имати барем једну компоненту различиту од нуле, а то значи да детерминанта горње матрице мора бити једнака нули

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0\,.$$

Решавањем горњег израза

$$(-\lambda)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & -\lambda \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow\ (-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \ \Leftrightarrow\ (-\lambda)\lambda^2 - 1 = 0 \ \Leftrightarrow\ -\lambda^3 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow\ \lambda^3 = -1 \ \Leftrightarrow\ \lambda^3 = (-1)^3 \ \Rightarrow\ \lambda_1 = -1$$

добија се једна једина (трипут дегенерисана) својствена вредност матрице $\mathscr{B}$

$$\lambda_1 = -1.$$

Сада треба ову својствену вредност заменити у систем једначина који одговара матричном изразу

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

који гласи

$$\begin{cases} -\lambda\xi_1 + \xi_2 = 0 \\ -\lambda\xi_2 - \xi_3 = 0 \\ \quad \xi_1 - \lambda\xi_3 = 0 \end{cases}$$

чијим се решавањем добија

$$\begin{cases}-\lambda_1\xi_1+\xi_2=0\\ -\lambda_1\xi_2-\xi_3=0\\ \xi_1-\lambda_1\xi_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1\cdot\xi_1+\xi_2=0\\ 1\cdot\xi_2-\xi_3=0\\ \xi_1+1\cdot\xi_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\xi_1+\xi_2=0\\ \xi_2-\xi_3=0\\ \xi_1+\xi_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\xi_1+\xi_2=0\\ \xi_2=\xi_3\\ \xi_1=-\xi_3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-\xi_3+\xi_3=0\\ \xi_2=\xi_3\\ \xi_1=-\xi_3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}0\cdot\xi_3=0\\ \xi_2=\xi_3\\ \xi_1=-\xi_3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\xi_3\in\mathbb{R}\\ \xi_2=\xi_3\\ \xi_1=-\xi_3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\xi_1=-\xi_3\\ \xi_2=\xi_3\\ \xi_3\in\mathbb{R}\end{cases}$$

Да би се својствени вектор разликовао од нултог вектора који представља тривијално решење својственог проблема, узима се да је $\xi_3=-1$, те су онда $\xi_1=1$ и $\xi_2=-1$; онда се својствени вектор може записати као матрица-колона

$$\big[|v_1\rangle\big]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}$$

или као уређена тројка

$$|v_1\rangle=(1,-1,-1)\,.$$

Да би се добио тражени орт, потребно је још поделити добијени својствени вектор својом нормом

$$|v_1\rangle^{\text{norm}}=\frac{|v_1\rangle}{\big\||v_1\rangle\big\|}=\frac{|v_1\rangle}{\sqrt{\langle v_1|v_1\rangle}}=\frac{(1,-1,-1)}{\sqrt{\langle(1,-1,-1)|(1,-1,-1)\rangle}}=\frac{(1,-1,-1)}{\sqrt{1^*\cdot1+(-1)^*\cdot(-1)+(-1)^*\cdot(-1)}}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1)$$

чиме је добијен *орт инвертоване осе*.

Како је еуклидски простор *тродимензионалан*, за још *два* ортонормирана вектора који ће чинити базис дводимензионалног инваријантног потпростора (који би допуњавао добијени једнодимензионални) најлакше је узети други и трећи вектор апсолутног базиса

$$|\mathrm{e}_2\rangle=|v_2\rangle=(0,1,0)\,,\ |\mathrm{e}_3\rangle=|v_3\rangle=(0,0,1)$$

те их ортонормирати у односу на добијени нормирани својствени вектор, прво други

$$|v_2\rangle^{\text{norm}}=\frac{|v_2\rangle-{}^{\text{norm}}\langle v_1|v_2\rangle|v_1\rangle^{\text{norm}}}{\big\||v_2\rangle-{}^{\text{norm}}\langle v_1|v_2\rangle|v_1\rangle^{\text{norm}}\big\|}=\frac{(0,1,0)-\frac{1}{\sqrt{3}}\langle(1,-1,-1)|(0,1,0)\rangle\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1)}{\left\|(0,1,0)-\frac{1}{\sqrt{3}}\langle(1,-1,-1)|(0,1,0)\rangle\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1)\right\|}$$

$$=\frac{(0,1,0)-\frac{1}{3}\langle(1,-1,-1)|(0,1,0)\rangle(1,-1,-1)}{\left\|(0,1,0)-\frac{1}{3}\langle(1,-1,-1)|(0,1,0)\rangle(1,-1,-1)\right\|}=\frac{(0,1,0)-\frac{1}{3}\big[1\cdot0+(-1)\cdot1+(-1)\cdot0\big](1,-1,-1)}{\left\|(0,1,0)-\frac{1}{3}\big[1\cdot0+(-1)\cdot1+(-1)\cdot0\big](1,-1,-1)\right\|}$$

односно

$$|v_2\rangle^{\text{norm}} = \frac{(0,1,0)+\frac{1}{3}(1,-1,-1)}{\left\|(0,1,0)+\frac{1}{3}(1,-1,-1)\right\|} = \frac{(0,1,0)+\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)}{\left\|(0,1,0)+\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)\right\|} = \frac{\left(\frac{1}{3},1-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)}{\left\|\left(\frac{1}{3},1-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)\right\|} = \frac{\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)}{\left\|\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)\right\|}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{\left\langle\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)\middle|\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)\right\rangle}} = \frac{\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^*\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^*\frac{2}{3}+\left(-\frac{1}{3}\right)^*\left(-\frac{1}{3}\right)}} = \frac{\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{1}{9}}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{\frac{6}{9}}} = \sqrt{\frac{9}{6}}\,\frac{1}{3}(1,2,-1) = \frac{3}{\sqrt{6}}\,\frac{1}{3}(1,2,-1) = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1)$$

а потом и трећи

$$|v_3\rangle^{\text{norm}} = \frac{|v_3\rangle - {}^{\text{norm}}\langle v_1|v_3\rangle|v_1\rangle^{\text{norm}} - {}^{\text{norm}}\langle v_2|v_3\rangle|v_2\rangle^{\text{norm}}}{\left\||v_3\rangle - {}^{\text{norm}}\langle v_1|v_3\rangle|v_1\rangle^{\text{norm}} - {}^{\text{norm}}\langle v_2|v_3\rangle|v_2\rangle^{\text{norm}}\right\|}$$

$$= \frac{(0,0,1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\langle(1,-1,-1)|(0,0,1)\rangle\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1)-\frac{1}{\sqrt{6}}\langle(1,2,-1)|(0,0,1)\rangle\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1)}{\left\|(0,0,1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\langle(1,-1,-1)|(0,0,1)\rangle\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1)-\frac{1}{\sqrt{6}}\langle(1,2,-1)|(0,0,1)\rangle\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1)\right\|}$$

$$= \frac{(0,0,1)-\frac{1}{3}\langle(1,-1,-1)|(0,0,1)\rangle(1,-1,-1)-\frac{1}{6}\langle(1,2,-1)|(0,0,1)\rangle(1,2,-1)}{\left\|(0,0,1)-\frac{1}{3}\langle(1,-1,-1)|(0,0,1)\rangle(1,-1,-1)-\frac{1}{6}\langle(1,2,-1)|(0,0,1)\rangle(1,2,-1)\right\|}$$

$$= \frac{(0,0,1)-\frac{1}{3}[1\cdot 0+(-1)\cdot 0+(-1)\cdot 1](1,-1,-1)-\frac{1}{6}[1\cdot 0+2\cdot 0+(-1)\cdot 1](1,2,-1)}{\left\|(0,0,1)-\frac{1}{3}[1\cdot 0+(-1)\cdot 0+(-1)\cdot 1](1,-1,-1)-\frac{1}{6}[1\cdot 0+2\cdot 0+(-1)\cdot 1](1,2,-1)\right\|}$$

$$= \frac{(0,0,1)+\frac{1}{3}(1,-1,-1)+\frac{1}{6}(1,2,-1)}{\left\|(0,0,1)+\frac{1}{3}(1,-1,-1)+\frac{1}{6}(1,2,-1)\right\|} = \frac{(0,0,1)+\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{6},\frac{2}{6},-\frac{1}{6}\right)}{\left\|(0,0,1)+\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{6},\frac{2}{6},-\frac{1}{6}\right)\right\|}$$

$$= \frac{\left(0+\frac{1}{3}+\frac{1}{6},0-\frac{1}{3}+\frac{2}{6},1-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)}{\left\|\left(0+\frac{1}{3}+\frac{1}{6},0-\frac{1}{3}+\frac{2}{6},1-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)\right\|} = \frac{\left(\frac{2}{6}+\frac{1}{6},-\frac{2}{6}+\frac{2}{6},\frac{6}{6}-\frac{2}{6}-\frac{1}{6}\right)}{\left\|\left(\frac{2}{6}+\frac{1}{6},-\frac{2}{6}+\frac{2}{6},\frac{6}{6}-\frac{2}{6}-\frac{1}{6}\right)\right\|} = \frac{\left(\frac{3}{6},0,\frac{3}{6}\right)}{\left\|\left(\frac{3}{6},0,\frac{3}{6}\right)\right\|}$$

или

$$|v_3\rangle^{\text{norm}} = \frac{\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)}{\left\|\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)\right\|} = \frac{\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left\langle\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)\middle|\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)\right\rangle}} = \frac{\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^*\frac{1}{2}+0^*\cdot 0+\left(\frac{1}{2}\right)^*\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}} = \frac{\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{2}{4}}} = \sqrt{\frac{4}{2}}\,\frac{1}{2}(1,0,1) = \frac{2}{\sqrt{2}}\frac{1}{2}(1,0,1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$$

Овако добијени базис може се записати и у облику *матрица-колона*

$$|v_1\rangle^{\text{norm}} \to \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\-\sqrt{2}\\-\sqrt{2}\end{bmatrix},\ |v_2\rangle^{\text{norm}} \to \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix} \text{ и } |v_3\rangle^{\text{norm}} \to \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}\sqrt{3}\\0\\\sqrt{3}\end{bmatrix}$$

од којих се онда направи унитарни оператор

$$\mathscr{U} = \left[|v_2\rangle^{\text{norm}}\,\middle|\,|v_3\rangle^{\text{norm}}\,\middle|\,|v_1\rangle^{\text{norm}}\right] = \frac{1}{\sqrt{6}}\left[\begin{array}{c|c|c}1 & \sqrt{3} & \sqrt{2}\\ 2 & 0 & -\sqrt{2}\\ -1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2}\end{array}\right] = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1 & \sqrt{3} & \sqrt{2}\\ 2 & 0 & -\sqrt{2}\\ -1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

од кога се преко трансформације сличности

$$\mathscr{A}_{\text{dij}} = \mathscr{U}^\dagger \mathscr{A}\,\mathscr{U} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1 & \sqrt{3} & \sqrt{2}\\ 2 & 0 & -\sqrt{2}\\ -1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2}\end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1 & \sqrt{3} & \sqrt{2}\\ 2 & 0 & -\sqrt{2}\\ -1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ \sqrt{3} & 0 & \sqrt{3}\\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \sqrt{3} & \sqrt{2}\\ 2 & 0 & -\sqrt{2}\\ -1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ \sqrt{3} & 0 & \sqrt{3}\\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\cdot 1+1\cdot 2+0\cdot(-1) & 0\cdot\sqrt{3}+1\cdot 0+0\cdot\sqrt{3} & 0\cdot\sqrt{2}+1\cdot(-\sqrt{2})+0\cdot(-\sqrt{2})\\ 0\cdot 1+0\cdot 2+(-1)\cdot(-1) & 0\cdot\sqrt{3}+0\cdot 0+(-1)\cdot\sqrt{3} & 0\cdot\sqrt{2}+0\cdot(-\sqrt{2})+(-1)\cdot(-\sqrt{2})\\ 1\cdot 1+0\cdot 2+0\cdot(-1) & 1\cdot\sqrt{3}+0\cdot 0+0\cdot\sqrt{3} & 1\cdot\sqrt{2}+0\cdot(-\sqrt{2})+0\cdot(-\sqrt{2})\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ \sqrt{3} & 0 & \sqrt{3}\\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0 & -\sqrt{2}\\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2}\\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2}\end{bmatrix}$$

то јест

$$\mathscr{A}_{\mathrm{dij}} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ \sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1\cdot 2+2\cdot 1+(-1)\cdot 1 & 1\cdot 0+2\cdot(-\sqrt{3})+(-1)\cdot\sqrt{3} & 1\cdot(-\sqrt{2})+2\cdot\sqrt{2}+(-1)\cdot\sqrt{2} \\ \sqrt{3}\cdot 2+0\cdot 1+\sqrt{3}\cdot 1 & \sqrt{3}\cdot 0+0\cdot(-\sqrt{3})+\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} & \sqrt{3}\cdot(-\sqrt{2})+0\cdot\sqrt{2}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{2} \\ \sqrt{2}\cdot 2+(-\sqrt{2})\cdot 1+(-\sqrt{2})\cdot 1 & \sqrt{2}\cdot 0+(-\sqrt{2})\cdot(-\sqrt{3})+(-\sqrt{2})\cdot\sqrt{3} & \sqrt{2}\cdot(-\sqrt{2})+(-\sqrt{2})\cdot\sqrt{2}+(-\sqrt{2})\cdot\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2+2-1 & -2\sqrt{3}-\sqrt{3} & -\sqrt{2}+2\sqrt{2}-\sqrt{2} \\ 2\sqrt{3}+\sqrt{3} & 3 & -\sqrt{6}+\sqrt{6} \\ 2\sqrt{2}-\sqrt{2}-\sqrt{2} & \sqrt{6}-\sqrt{6} & -2-2-2 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3 & -3\sqrt{3} & 0 \\ 3\sqrt{3} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{6} & -\frac{3\sqrt{3}}{6} & 0 \\ \frac{3\sqrt{3}}{6} & \frac{3}{6} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

добија *квазидијагонални* облик матрице

$$\mathscr{A}_{\mathrm{dij}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$